

# ОПТИЧЕСКАЯ БИСТАБИЛЬНОСТЬ И НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЙНИИ СВЕТА НА КОНЕЧНОМ ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Г. В. Шадрина <sup>a,b\*</sup>, Е. Н. Булгаков <sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Институт вычислительного моделирования, ФИЦ КНЦ Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

<sup>b</sup> *Институт физики им. Л. В. Киренского, ФИЦ КНЦ Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 30 мая 2022 г.,  
после переработки 10 июня 2022 г.  
Принята к публикации 13 июня 2022 г.

Исследовалась оптическая бистабильность и явление нарушения симметрии в системе связанных фотонно-кристаллических микрорезонаторов с включением из материала с керровской восприимчивостью при падении плоской волны. Для этой цели предложено обобщение модального метода Т-матрицы на случай нелинейных микрорезонаторов, поддерживающих одну монополярную моду. Показано, что оба явления существенно зависят не только от интенсивности внешнего поля, но и от угла падения и размера фотонного кристалла. Обнаружены и исследованы различные режимы возбуждения.

DOI: 10.31857/S0044451022110049  
EDN: KYGQJZ

ли [7–13], диоды и транзисторы, генерация гармоник [14–17].

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное распространение света в периодических структурах является привлекательной областью исследований и приложений. Для многих важных приложений желательно иметь сильное и почти мгновенное взаимодействие света со светом в минимальном объеме. Это может быть достигнуто с использованием нелинейных материалов в фотонно-кристаллических структурах. Фотонные кристаллы (ФК) обладают так называемой полной запрещенной щелью, что позволяет создавать на их основе простые и разветвленные волноводные структуры, резонансные микрополости, за счет чего удается эффективно управлять линейным и нелинейным распространением света [1–6]. Наиболее яркими примерами приложений нелинейных эффектов в ФК-структурах являются оптические переключате-

Оптическая бистабильность (ОБ) — классическое нелинейное оптическое явление [18], которое интенсивно изучается последние десятилетия. Простейшая нелинейная среда — это керровская среда, когда нелинейные эффекты моделируются добавлением члена, пропорционального квадрату электрического поля, к линейной диэлектрической константе. ОБ в микроструктурах [19–23] является основой для различных приложений, позволяющих управлять светом с помощью света, таких как оптические переключатели, оптические диоды и транзисторы, оптическая память [24]. ОБ на наномасштабах есть ключевая компонента интегрированных нанофотонных устройств. Однако нелинейный коэффициент чрезвычайно мал, и для достижения необходимого результата нужна либо большая величина падающего поля, либо большие размеры устройства для накопления эффекта. Ясно, что такие устройства неприемлемы для нанофотоники. Один из путей преодоления указанной проблемы — это усиление нелинейных эффектов за счет значительного усиления локального поля по сравнению с падаю-

\* E-mail: galiy\_sha@mail.ru

щим. Для этой цели обычно используют фотоннокристаллические микрорезонаторы с высокой добротностью. Локальное поле усиливается в  $\sqrt{Q}$  раз. Строгий анализ [25] показывает, что в оценку порога бистабильности входит также модальный объем (объем пространства, занимаемый резонансной модой  $V$ )  $P \sim V/(n_2 Q^2)$ . В принципе, подходят любые моды с большим  $Q$ , но наиболее желательными являются моды, у которых  $Q \rightarrow \infty$ , а частота остается фиксированной. По этой причине простейшие резонаторы в виде диэлектрической сферы не очень подходят для наблюдения ОБ [22], так как при  $Q \rightarrow \infty$  частота моды также стремится к бесконечности.

Интересным альтернативным подходом, открытым совсем недавно, для увеличения добротности в диэлектрических системах является использование связанных состояний в континууме (ССК), а именно неизлучающих состояний, погруженных в континуум состояний рассеяния [26]. Существенным моментом в использовании ССК является тот факт, что истинные ССК поддерживаются лишь периодическими наноструктурами, протяженными как минимум в одном пространственном измерении. Сами по себе ССК не взаимодействуют с электромагнитным излучением, падающим на систему, однако ближайшие в спектре моды обладают сколь угодно высокой добротностью. Это дает возможность наблюдать в присутствии нелинейности фактически беспороговые мультистабильные состояния и состояния с нарушенной симметрией, а также эффективно использовать такие микроструктуры для генерации гармоник [27–35].

В целом это многообещающее направление — нелинейное рассеяние света за счет ССК — находится пока на начальной стадии развития. При всей привлекательности использования ССК-структур они являются бесконечно протяженными. В реальности, если структура имеет  $N$  периодов,  $Q$ -фактор становится конечным и ведет себя по закону  $N^\alpha$  (как правило  $\alpha \sim 2 \div 3$ ), и обычно для достижения  $Q \sim 10^6$  требуется порядка 100 периодов [36].

Другим интересным фундаментальным аспектом физики нелинейных оптических систем является явление нарушения симметрии (ЯНС). ЯНС возникает в симметричных нелинейных системах. Обычно несимметричная мода возникает при нелинейном взаимодействии близко расположенных по частоте мод разной симметрии. ЯНС, например, наблюдалось при распространении встречных пучков, падающих на нелинейную керровскую среду [37].

В нанофотонике это явление также наблюдалось в ФК-волноводных структурах, при взаимодействии распространяющейся волноводной моды с нелинейными резонансными дефектными модами [38–44], и в дифракционных решетках [28, 29]. Обычно ОБ и ЯНС сосуществуют в одной области параметров, но порог возникновения ОБ меньше. В качестве приложения ЯНС предлагалось использовать для резонансного переключения светового потока между ФК-волноводами [40].

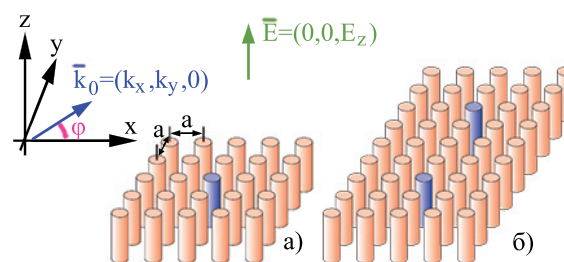


Рис. 1. ФК-структура, вид сбоку. а) Структура с одной микрополостью. б) Структура с двумя микрополостями, здесь дефектные цилиндры разделены тремя слоями обычных

В данной работе мы предлагаем простой дизайн оптической микроструктуры, отличный от ранее исследованного в литературе [7–13], для которого электромагнитное поле, возбуждающее нелинейный микрорезонатор, подается и рассеивается в присоединенные ФК-волноводы, что является оправданным, если сама микроструктура является элементом, интегрированным с другими микроустройствами по обработке сигналов. Однако для наблюдения ОБ волноводные каналы оказываются излишними. В нашем случае микроструктура представляет собой фотонный кристалл конечных размеров, внутри которого заключена одна или несколько взаимодействующих резонансных микрополостей, в центре каждой помещен диэлектрический цилиндр из керровского материала (нелинейный микрорезонатор), как это представлено на рис. 1. На микроструктуру падает плоская электромагнитная волна, которая непосредственно, благодаря конечной толщине окружающих стенок из цилиндров, взаимодействует с монопольной модой микрорезонатора. Расчет электромагнитного поля при рассеянии света на нелинейной среде представляет собой сложную проблему, для решения которой используются разные

подходы [6, 21, 22, 38, 45–47]. Как правило, ограничиваются двумерными моделями. Например, в случае ФК-пластины (мембраны), состоящей из периодически расположенных диэлектрических цилиндров конечной высоты, электромагнитное поле имеет все ненулевые компоненты. Собственные моды классифицируются как ТЕ-подобные и ТМ-подобные [25], которые при увеличении толщины пластины (высоты цилиндров) переходят в обычные двумерные ТЕ- и ТМ-моды. Использование двумерной модели для расчета ФК-мембраны является оправданным приближением, если толщина достаточно велика, по крайней мере, превышает период в несколько раз. Ситуация еще более усложняется, если сама мембрана имеет конечные размеры в плоскости. В этом случае расчет электромагнитного поля возможен только с использованием прямых численных алгоритмов, например, метода конечных элементов, либо очень изощренных полуаналитических подходов [48]. Ситуация, когда в системе присутствует нелинейность, делает проблему практически неразрешимой. Поэтому разумные упрощения необходимы. В данной работе мы считаем цилиндры достаточно протяженными, чтобы считать проблему двумерной, кроме того, то обстоятельство, что диэлектриками являются именно цилиндры, дает возможность использовать для расчета мощный метод Т-матрицы [49, 50]. Нам удалось преодолеть очевидную трудность включения нелинейности в метод Т-матрицы хотя бы для случая монополярной резонансной моды с достаточно большим Q-фактором. Благодаря этому подходу, описанному в Приложении, нам удалось свести задачу к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, что существенно облегчило численные расчеты. Нами исследовались явления оптической бистабильности и нарушения симметрии при рассеянии плоской волны при различных углах падения. Оба явления наблюдаются при низкой мощности падающей волны и сильно зависят от угла падения.

## 2. ФОТОННЫЙ КРИСТАЛЛ С КЕРРОВСКИМ ДЕФЕКТОМ

Фотонный кристалл, который мы исследуем, представляет собой  $2d$ -периодическую структуру, состоящую из бесконечных вдоль оси  $z$  диэлектрических цилиндров (рис. 1), центры которых образуют квадратную решетку. Хорошо известно [25] (рис. 2), что данная структура обладает полной запрещенной щелью в спектре в случае ТМ-поляризованного из-

лучения. Благодаря щели можно создавать локализованные резонансные полости, которые поддерживают локализованные моды разной симметрии — монополярные, дипольные и т.д.

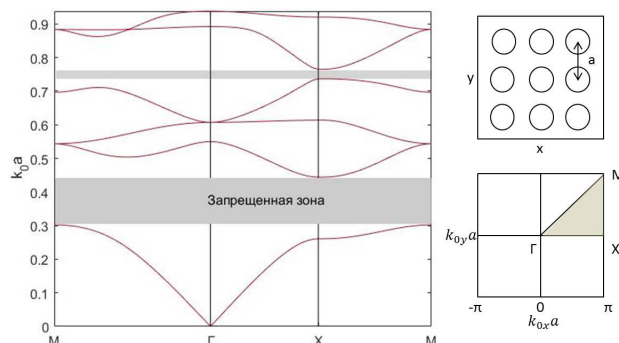


Рис. 2. Зонная структура для ТМ-поляризованного излучения (электрическое поле направлено вдоль оси стержней) для квадратной решетки цилиндрических диэлектрических стержней (радиус стержня  $r/a = 0.18$  и  $\epsilon = 11.56$ , постоянная решетки  $a$ ) в воздухе

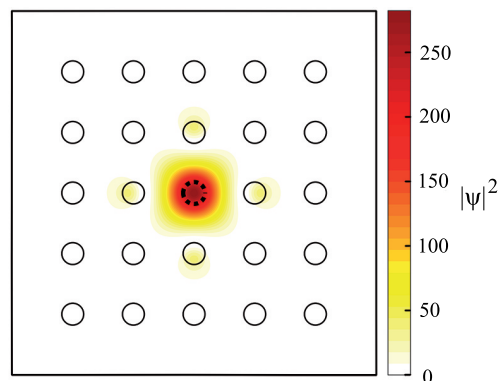


Рис. 3. Монополярная мода частоты  $k_0 a = 0.3588$ , локализованная на центральном дефектном цилиндре с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0 = 3$ , для остальных цилиндров ФК  $\epsilon = 11.56$

Резонансная полость — микрорезонатор — появляется, если один из цилиндров заменить на дефектный цилиндр, у которого либо другой радиус, либо другая диэлектрическая проницаемость. Пример локализованной моды в микрорезонаторе показан на рис. 3. В нашем случае мы будем изменять только диэлектрическую проницаемость дефектного цилиндра, оставляя радиус постоянным. В этом случае возможна только монополярная локализованная мода, частота которой зависит от  $\epsilon_0$  (рис. 4) и которая

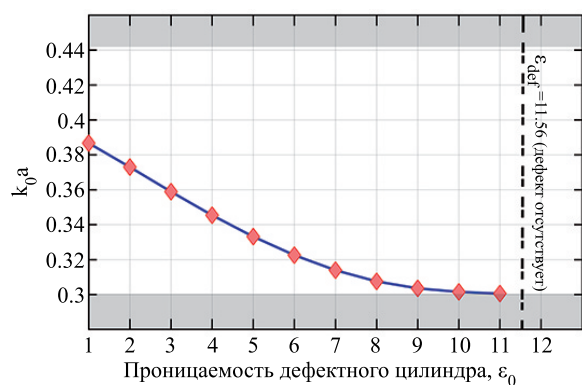


Рис. 4. Частота локализованной моды в зависимости от диэлектрической проницаемости  $\epsilon_0$  (радиус стержней  $r/a = 0.18$  и  $\epsilon = 11.56$ )

расположена строго в запрещенной щели. В случае бесконечного ФК данная мода является незатухающей и обладает бесконечной добротностью. Однако если ФК имеет конечные размеры (несколько слоев вдоль направлений  $x$  и  $y$ ), добротность резонансной моды становится конечной благодаря утечке электромагнитного излучения в радиационный континуум окружающего пустого пространства. Добротность резонансной моды тем выше, чем больше количество слоев, отделяющих резонансную полость от окружающего пространства (рис. 5). Как показывает рисунок, добротность экспоненциально быстро возрастает и при размере ФК  $7 \times 7$  цилиндров достигает  $Q \sim 10^6$ .

Если дефектный цилиндр изготовлен из материала, у которого проницаемость  $\epsilon_0$  является константой (т.е. не зависит от амплитуды поля), то при рассеянии внешней плоской волны можно наблюдать резонансное рассеяние света при частоте, близкой к частоте локализованной моды. При строгом резонансе амплитуда электрического поля в полости резко повышается пропорционально  $\sqrt{Q}$ . Резонансное усиление электрического поля, как известно, является условием усиления нелинейных эффектов и наблюдения ОБ. В данной работе мы предполагаем, что дефектный цилиндр изготовлен из материала с керровской восприимчивостью, тогда показатель преломления

$$n = n_0 + n_2 I, \quad I = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}|^2.$$

Уравнение для  $E_z$ -компоненты электрического поля в случае ТМ-моды имеет вид

$$\nabla^2 E_z(x, y) + \epsilon k_0^2 E_z(x, y) = 0. \quad (1)$$

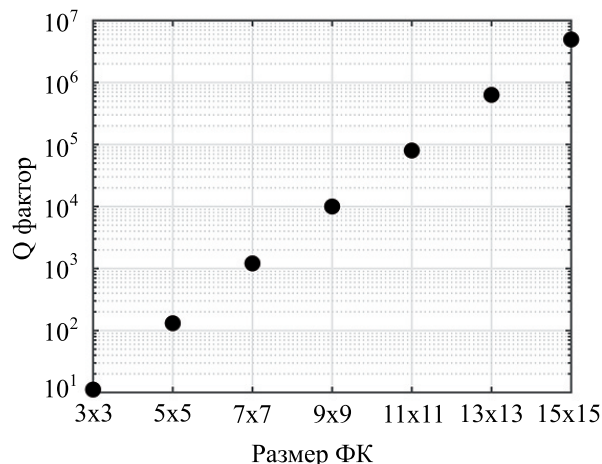


Рис. 5. Добротность резонансной моды в микрорезонаторе как функция размера ФК. Диэлектрическая проницаемость цилиндров такая же, как на рис. 3

Переходя к безразмерным величинам, перепишем уравнение (1) как

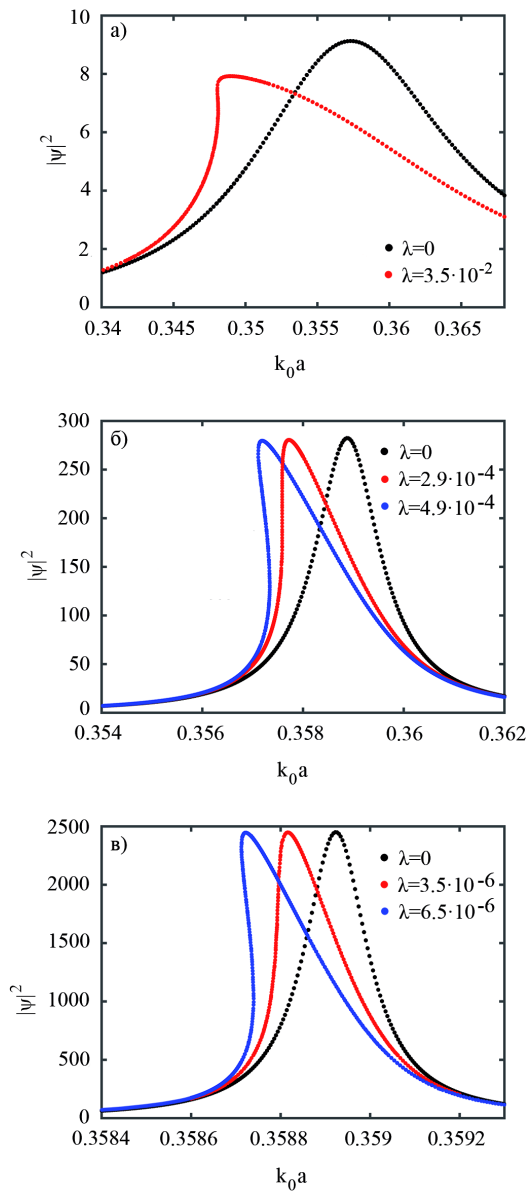
$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(x, y) + k_0^2 (\epsilon_0 + \lambda |\psi(x, y)|^2) \psi(x, y) &= 0, \quad (2) \\ k_0 &= \frac{\omega}{c} a, \quad \mathbf{r} \Rightarrow \frac{\mathbf{r}}{a}, \\ \lambda &= \frac{2n_0 n_2 c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2, \quad \psi = \frac{E_z}{|\mathbf{E}_0|}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{E}_0$  — напряженность поля внешней плоской волны  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , падающей на ФК-структуру, а  $a$  — период решетки ФК. Постоянную Керра  $n_2$  в наших численных экспериментах выбираем равной  $n_2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2/\text{Вт}$ , а  $\epsilon_0 = 3$ .

Уравнение (2) решалось численно, с использованием Т-модального метода, описанного в Приложении.

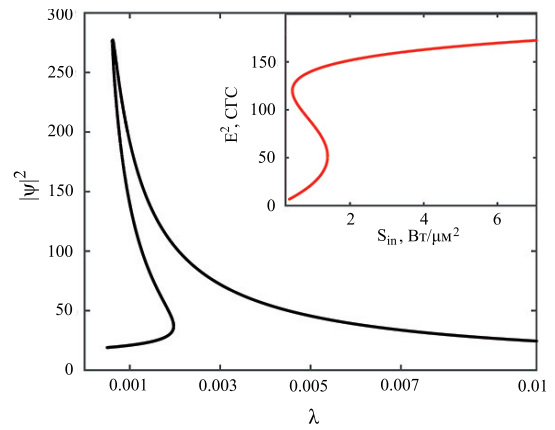
### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На рис. 6 представлены результаты численного расчета возбуждения одной резонансной полости (рис. 3) в случае падения плоской волны под углом  $\varphi = 0$  в зависимости от частоты внешнего поля  $k_0 = \omega/c$  и нелинейной константы  $\lambda$ . Амплитуда  $\psi$  — это амплитуда возбуждения на нелинейном дефектном цилиндре. Кривые демонстрируют переход в бистабильное состояние при изменении  $\lambda$ . Как и ожидалось, переход происходит раньше для резонансной полости с большим  $Q$ -фактором. На рис. 7 показаны зависимости  $|\psi|$  при резонансном возбуждении



**Рис. 6.** Резонансное возбуждение электромагнитного поля на дефектном цилиндре  $|\psi|$  для ФК разных размеров в зависимости от константы нелинейности  $\lambda$ . а) Для ФК  $3 \times 3$  цилиндра существует пороговое значение константы нелинейности  $\lambda$ , при котором система переходит в режим бистабильности; б) для кристалла  $5 \times 5$  цилиндров это событие наступает на два порядка раньше. в) Увеличение размеров ФК до  $7 \times 7$  цилиндров приводит к еще большему уменьшению порогового значения  $\lambda$

полости при фиксированной частоте, но с изменяющейся нелинейной константой  $\lambda$ . Надо отметить, что зависимости на рис. 6,7 являются довольно типичными для керровской неустойчивости, и бистабильность наступает при изменении потока мощно-



**Рис. 7.** Зависимость относительной амплитуды поля  $|\psi|$  на дефектном цилиндре от константы нелинейности  $\lambda$  для кристалла размером  $5 \times 5$  цилиндров при  $k_0 a = 0.35587$ . Вставка: тот же график пересчитан в размерных величинах для нелинейности на центральном цилиндре  $n_2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2/\text{Вт}$

сти внешней волны (см. вставку на рис. 7), поскольку  $n_2$  — фиксированная величина.

Однако в нашем случае появляется еще один параметр, который позволяет управлять переходом в бистабильный режим — это угол  $\varphi$ , угол падения плоской волны на ФК. Действительно, как показывает рис. 8, бистабильное решение сильно зависит от угла падения. И более того, от угла падения  $\varphi$  зависит сам порог перехода в бистабильный режим (рис. 9), причем эта зависимость носит крайне выраженный характер — порог может изменяться в три раза. На рис. 10 приводится решение при фиксированной мощности внешней волны как функция угла падения. Интересным наблюдением является тот факт, что бистабильность при разной мощности волны (фиолетовая и красная линии) существует при разных углах падения, причем области существования ОБ не перекрываются.

Перейдем к рассмотрению более сложного случая — две близко расположенные одинаковые резонансные полости. Прежде всего сфокусируемся на явлении нарушения симметрии решения для электрического поля при симметричном падении плоской волны ( $\varphi = 0$ ). На рис. 11а представлен случай, когда между дефектными цилиндрами находится два слоя обычных цилиндров. Черной линией показано решение с ненарушенной симметрией (резонансные полости возбуждаются одинаково), линия с двумя цветами (синий и фиолетовый) показывает решение с нарушенной симметрией (полости воз-

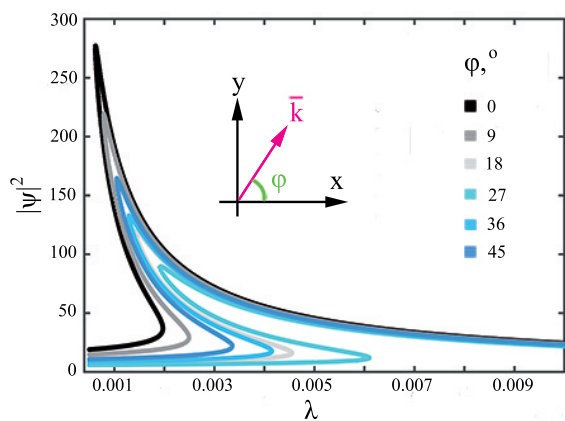


Рис. 8. (В цвете онлайн) Зависимости относительной амплитуды поля  $|\psi|$  на дефектном цилиндре от константы нелинейности  $\lambda$  при разных углах падения внешней волны с частотой  $k_0 a = 0.35587$  для кристалла  $5 \times 5$  цилиндров

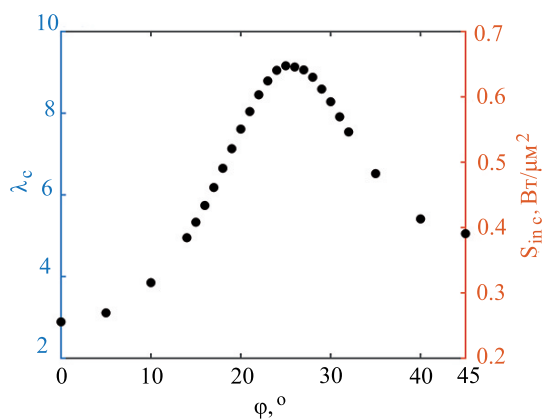


Рис. 9. Критическое (пороговое для наступления ОБ) значение константы нелинейности  $\lambda$  (левая ось) и критическая мощность внешней волны  $S_{in}$  (правая ось) в зависимости от угла падения на кристалл размера  $5 \times 5$  при частоте  $k_0 a = 0.35759$

буждаются неодинаково), причем разными цветами показаны разные решения. Стоит отметить, что во всех рассмотренных нами случаях ЯНС наступает, как правило, после появления ОБ и очень сильно изменяется при изменении мощности внешней волны (серповидная кривая очень быстро увеличивается в размере). На рис. 11б построены решения для амплитуд  $|\psi|$  возбуждения полостей, когда число изолирующих слоев равно 3. Как видно, характер решения резко поменялся — теперь ЯНС-решения строго изолированы от решений не нарушающих симметрию. На рис. 12 детально показано, как возбужда-

ются резонансные полости в случае разных решений. На рис. 13 представлены пороги для появления

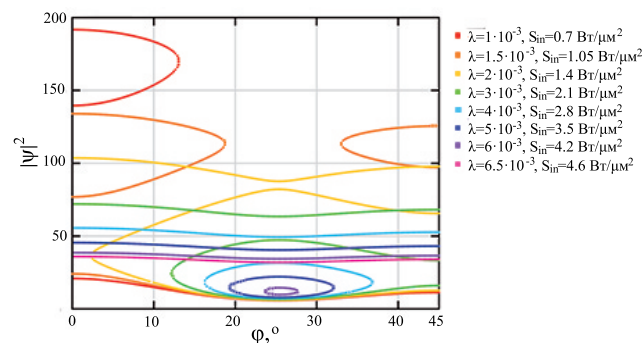


Рис. 10. (В цвете онлайн) Зависимости относительной амплитуды поля  $|\psi|$  на дефектном цилиндре от угла падения внешней волны  $\phi$  на кристалл  $5 \times 5$  цилиндров при разных константах нелинейности  $\lambda$  на частоте  $k_0 a = 0.35587$ . Справа от  $\lambda$  в легенде показана мощность падающей волны, которая соответствует конкретному значению  $\lambda$  при  $n_2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2/\text{Вт}$

обычной ОБ (без нарушения симметрии) и ЯНС. Хотя величины могут отличаться даже в три раза, в целом порядок величин один и тот же, что позволяет нам сделать вывод, что оба явления обычно сосуществуют примерно при одних и тех же значениях амплитуды внешнего поля. Этот момент не является столь очевидным, хотя и был продемонстрирован ранее в работе [41], когда источником возбуждения резонансных полостей являлись волноводные моды ФК.

Явление нарушения симметрии и оптическая бистабильность являются ярким примером управления света с помощью света на микроновых масштабах. Оба явления могут наблюдаться при умеренных значениях амплитуды внешнего поля, легко достигаемых на практике, если  $Q$ -фактор резонансной полости  $Q \gtrsim 10^4 - 10^5$ .

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-12-00070).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Опишем решение задачи о рассеянии плоской волны системой диэлектрических цилиндров с проницаемостью  $\epsilon$ , используя Т-модальный метод [50].

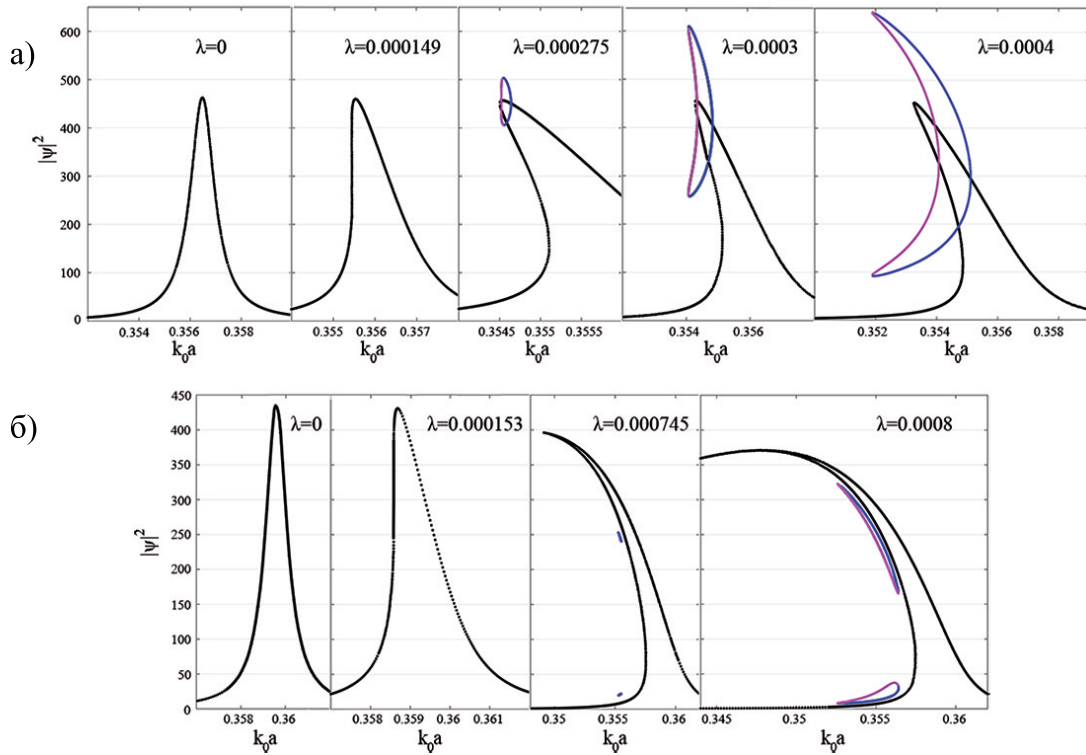


Рис. 11. (В цвете онлайн) Относительная амплитуда поля  $|\psi|$  на двух дефектных цилиндрах для ФК размером: а)  $5 \times 8$  цилиндров, дефектные цилиндры разделены двумя обычными; б)  $5 \times 9$  цилиндров, как на рис. 1б. Черным цветом обозначены симметричные решения, фиолетовым и синим — с нарушенной симметрией

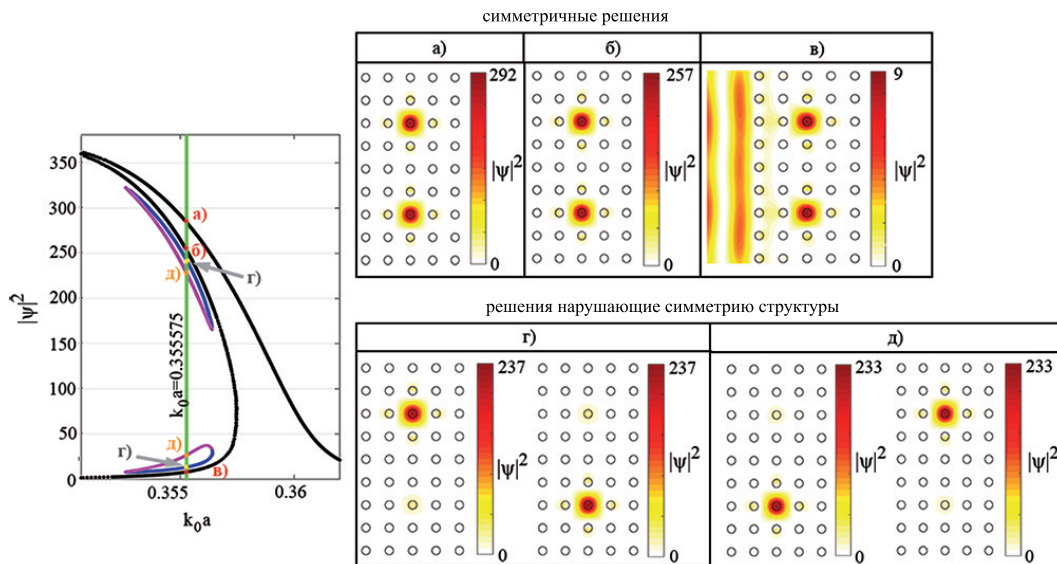


Рис. 12. (В цвете онлайн) Варианты возбуждения двух керровских полостей в ФК  $5 \times 9$  цилиндров на длине волны  $k_0a = 0.355575$ . Волновые функции в верхней части рисунка симметричны, волновые функции в нижней части рисунка обладают нарушенной симметрией

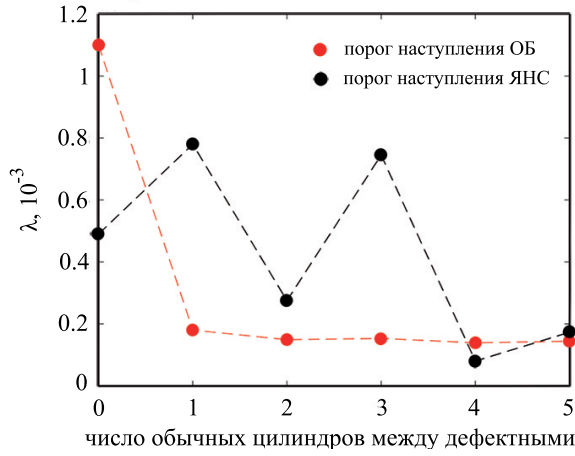


Рис. 13. (В цвете онлайн) Пороги наступления оптической бистабильности и явления нарушения симметрии для кристаллов разных размеров

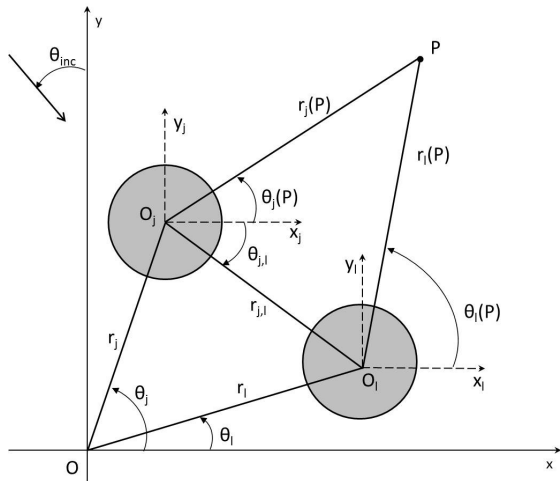


Рис. 14. Глобальная  $xу$  и локальные  $x_jy_j, x_l y_l$  системы координат

При изложении материала следуем работе [49]. Электрическое поле в Т-методе разлагается по цилиндрическим гармоникам как внутри, так и вне  $j$ -го цилиндра в локальной системе координат

(см. рис. 14):

$$E_z = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{jm} J_m(\sqrt{\epsilon} k_0 r_j) e^{im\varphi_j}, \quad r_j < R_j,$$

$$E_z = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{jm} J_m(k_0 r_j) e^{im\varphi_j} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{jm} H_m^{(1)}(k_0 r_j) e^{im\varphi_j}, \quad r_j > R_j, \quad (4)$$

где  $k_0 = \omega/c$ . Коэффициенты  $a_{jm}$  — амплитуды гармоник падающего на  $j$ -й цилиндр поля, а  $b_{jm}$  — амплитуды рассеянного поля. Амплитуды  $a_{jm}$  представим в виде

$$a_{j,m} = a_{j,m}^{inc} + a_{j,m}^{rods}, \quad (5)$$

где

$$a_{j,m}^{inc} = (-1)^m e^{ik_0 R_j \sin(\theta_{inc} - \theta_j) - im\theta_{inc}} \quad (6)$$

— амплитуды падающей на систему плоской волны,  $R_j, \theta_j$  — положение  $j$ -го цилиндра относительно глобальной системы координат. Амплитуды  $a_{j,m}^{rods}$  представляют поле, рассеянное от остальных цилиндров  $l \neq j$ . Используя формулу Графа, можно связать амплитуды  $a_{j,m}^{rods}$  и амплитуды рассеянных волн  $b_{l,m} (l \neq j)$ :

$$a_{j,m}^{rods} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{l \neq j} b_{l,q} e^{i(m-q)\theta_{j,l}} H_{m-q}^{(1)}(kr_{j,l}). \quad (7)$$

Используя (5)–(7), получаем

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{Q}_j + \sum_{l \neq j} \hat{T}_{j,l} \mathbf{b}_l, \quad (8)$$

где

$$a_{j,m} = (\mathbf{a}_j)_m, \quad (9)$$

$$b_{j,m} = (\mathbf{b}_j)_m, \quad (10)$$

$$(\mathbf{Q}_j)_m = (-1)^m e^{ik_0 R_j \sin(\theta_{inc} - \theta_j) - im\theta_{inc}}, \quad (11)$$

$$(\hat{T}_{j,l})_{m,q} = e^{i(q-m)\theta_{j,l}} H_{m-q}^{(1)}(k_0 r_{j,l}). \quad (12)$$

Чтобы замкнуть систему (8), используем связь амплитуд  $(\mathbf{b}_j)$  и  $(\mathbf{a}_j)$  через диагональную  $t$ -матрицу:

$$\mathbf{b}_j = \hat{t}_j \mathbf{a}_j, \quad (13)$$

$$\hat{t}_{m,m} = - \left( \sqrt{\epsilon} k_0 J_m(k_0 R) J'_m(k_0 \sqrt{\epsilon} R) - k_0 J_m(k_0 \sqrt{\epsilon} R) J'_m(k_0 R) \right) \times \left( \sqrt{\epsilon} k_0 H_m^{(1)}(k_0 R) J'_m(k_0 \sqrt{\epsilon} R) - k_0 J_m(k_0 \sqrt{\epsilon} R) H^{(1)'}_m(k_0 R) \right)^{-1}. \quad (14)$$

Приходим к системе линейных уравнений для амплитуд  $\mathbf{b}_j$ :

$$\mathbf{b}_j - \sum_{l \neq j} \hat{t}_j \hat{T}_{j,l} \mathbf{b}_l = \hat{t}_j \mathbf{Q}_j. \quad (15)$$

Если цилиндры обладают керровской нелинейной поправкой к диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \lambda |E_z(\mathbf{r})|^2$ , то формула (15) по-прежнему пригодна при условии, что нам известна связь между амплитудами  $\mathbf{b}_j^{(nonlin)}$  и  $\mathbf{a}_j^{(nonlin)}$  через нелинейную  $t$ -матрицу:

$$\mathbf{b}_j^{(nonlin)} = \hat{t}_j^{(nonlin)} \mathbf{a}_j^{(nonlin)}. \quad (16)$$

Существование такой связи в виде формулы (16) отнюдь не очевидно. Далее мы выведем явное выражение для  $\hat{t}_j^{(nonlin)}$  при двух предположениях: 1) нелинейные цилиндры расположены только в резонансных полостях, 2) при резонансном рассеянии света, когда нелинейность начинает играть сколько-нибудь заметную роль, внутри каждой из полостей возбуждается монополярная мода, т.е. на нелинейном цилиндре доминирует  $s$ -рассеяние.

Уравнение для  $E_z$ -компоненты поля на нелинейном цилиндре в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_0^2 (\varepsilon_0 + \lambda |E_z(r, \varphi)|^2) \right] E_z(r, \varphi) = 0. \quad (17)$$

Волновую функцию ищем по-прежнему в виде ряда:

$$E_z(r, \varphi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi_m(r) e^{im\varphi}. \quad (18)$$

Уравнение (17) после подстановки (18) приближенно представляется в виде системы несвязанных уравнений

$$\psi_m'' + \frac{1}{r} \psi_m' + k_0^2 \left( \varepsilon_0 - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_m = 0, \quad m \neq 0, \quad (19a)$$

$$\psi_0'' + \frac{1}{r} \psi_0' + k_0^2 (\varepsilon_0 + \lambda |\psi_0|^2) \psi_0 = 0, \quad m = 0. \quad (19b)$$

Нелинейный член нужно учитывать только в уравнении на  $\psi_0$ , в силу того что  $|\psi_m| \ll |\psi_0|$  при резонансном  $s$ -рассеянии. В отсутствие же резонанса нелинейностью можно пренебречь. Таким образом, задача сводится к решению уравнения (19b). Это можно сделать приближенно, по теории возмущений, учитывая то обстоятельство, что даже при резонансном рассеянии  $\lambda |\psi_0|^2 \ll \varepsilon_0$ .

Для этой цели сформулируем вспомогательную краевую задачу:

$$\psi(r)'' + \frac{1}{r} \psi(r)' + k_0^2 (\varepsilon_0 + \lambda |\psi(r)|^2) \psi(r) = 0, \quad (20)$$

$$\psi(r=0) < \infty, \quad \psi(r=R) = A.$$

В дальнейшем считаем  $\psi \equiv \psi_0$ . Задача (20) может быть решена через функцию Грина  $g(r)$ :

$$r g''(r) + g' + \left( k_0^2 r - \frac{m^2}{r} \right) g(r) = -\delta(r - \rho), \quad (21)$$

$$g(r=0) < \infty,$$

$$g(r=R) = 0.$$

Уравнение (21) имеет явное решение:

$$g(r, \rho) = \frac{\pi J_m(k_0 r_<)}{2 J_m(k_0 R)} \left( J_m(k_0 r_<) Y_m(k_0 R) - J_m(k_0 R) Y_m(k_0 r_>) \right), \quad (22)$$

где  $r_> = \max(r, \rho)$ ,  $r_< = \min(r, \rho)$ . Тогда уравнение (20) имеет формальное решение

$$\tilde{\psi}(r) = \int_0^R g(r, \rho) [k_0^2 \varepsilon_0 \rho A + \lambda k_0^2 \rho |\psi|^2 \psi] d\rho, \quad (23)$$

$$\tilde{\psi}(r) = \psi - A.$$

Легко проверить, что

$$A \int_0^R g(r, \rho) k_0^2 \rho d\rho = A \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} - A, \quad (24)$$

$$k = \sqrt{\varepsilon_0} k_0,$$

Так, при  $\lambda = 0$  имеем

$$\tilde{\psi}(r) = A \left( \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} - 1 \right). \quad (25)$$

Поэтому интегральное уравнение (23) можно записать в виде

$$\psi(r) = \psi(r)_g + \lambda k_0^2 \int_0^R \rho |\psi(\rho)|^2 \psi(\rho) g(r, \rho) d\rho, \quad (26)$$

$$\psi(r)_g = A \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}.$$

В приближении  $\lambda \rightarrow 0$  уравнение (26) приближенно можно решать методом итерации. В первом борновском приближении находим

$$\begin{aligned} \psi(r) &\approx \psi(r)_g + \lambda k_0^2 \int_0^R \rho |\psi_g(\rho)|^2 \psi_g(\rho) g(r, \rho) d\rho = \\ &= \psi(r)_g + \psi_{corr}(r). \end{aligned} \quad (27)$$

Поправочный член  $\psi_{corr}(r)$  может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} \psi_{corr}(r) &= \lambda k_0^2 \int_0^R \rho |\psi_g|^2 \psi_g g(r, \rho) d\rho = \\ &= \frac{\pi\gamma}{2k^2} J_0(kr) \left[ \frac{Y_0(kr)}{J_0(kR)} \int_0^{kR} x J_0^4(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^R x Y_0(x) J_0^3(x) dx \right] - \\ &\quad - \lambda k_0^2 Y_0(kr) \int_0^{kr} x J_0^4(x) dx + \\ &\quad + \lambda k_0^2 J_0(kr) \int_0^{kr} x Y_0(x) J_0^3(x) dx, \quad (28) \\ \gamma &= \frac{\lambda k_0^2 |A| A}{J_0^3(kR)}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\psi_{corr}(r = R) = 0$ . Для сшивки решения внутри цилиндра (27) с внешним решением необходимо знание  $\psi'_{corr}(r = R)$ . Оно находится из уравнения (28):

$$\psi'_{corr}(r = R) = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0} \frac{|A|^2 A}{R J_0^4(kR)} \int_0^{kR} x J_0^4(x) dx. \quad (29)$$

Следовательно, приближенное решение внутри цилиндра имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \psi_g(r) + \psi_{corr}(r), \\ \psi(r = R) &= A, \\ \psi'(r = R) &= k \frac{J'_0(kR)}{J_0(kR)} A - \varkappa |A|^2 A, \quad (30) \\ \varkappa &= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \frac{1}{R J_0^4(kR)} \int_0^{kR} x J_0^4(x) dx. \end{aligned}$$

Теперь можно выполнить сшивку с внешним решением

$$\psi(r) = a_0 J_0(k_0 r) + b_0 H_0^{(1)}(k_0 r),$$

получаем

$$b_0 = t_0 a_0 - \frac{\varkappa |A|^2 A}{k_0 H_0^{(1)'}(k_0 R) - k \frac{J'_0(kR)}{J_0(kR)} H_0^{(1)}(k_0 R)}, \quad (31)$$

где  $t_0$  — элемент  $t$ -матрицы при линейном рассеянии (14).

Чтобы исключить параметр  $A$  из выражения (31), можно взять его значение в линейной задаче ( $\lambda = 0$ ):

$$A \approx b_0 \left[ \frac{J_0(k_0 R)}{t_0} + H_0^{(1)}(k_0 R) \right] + O(\Lambda). \quad (32)$$

Тогда

$$t_0 a_0 = b_0 (1 + \Lambda |b_0|^2), \quad (33)$$

$$\Lambda = \frac{\varkappa \left| \frac{J_0(k_0 R)}{t_0} + H_0^{(1)}(k_0 R) \right|^2 \left( \frac{J_0(k_0 R)}{t_0} + H_0^{(1)}(k_0 R) \right)}{k_0 H_0^{(1)'}(k_0 R) - k \frac{J'_0(kR)}{J_0(kR)} H_0^{(1)}(k_0 R)}.$$

Итак, формула (33) задает необходимую связь между амплитудами  $a_0$  и  $b_0$ . В результате в нелинейном случае формула (15) приобретает вид

$$\begin{aligned} \left( 1 + \Lambda \sum_{k \in N_k} |b_{k0}|^2 \hat{P}_k \right) \mathbf{b}_j - \sum_{l \neq j} \hat{t}_j \hat{T}_{jl} \mathbf{b}_l = \hat{t}_j \mathbf{Q}_j, \quad (34) \\ (\hat{P}_k b_j)_m = \delta_{jk} \delta_{0m} b_{j0}, \end{aligned}$$

где  $N_k$  — множество нелинейных цилиндров. Уравнение (34) — замкнутая система уравнений для амплитуд  $\mathbf{b}_j$ . В компьютерных вычислениях азимутальное число  $m$  пробегает конечный ряд значений  $m \in [-M, -M + 1, \dots, +M]$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. D.N. Neshev, A.A. Sukhorukov, W. Krolikowski, Y.S. Kivshar, and S. Lan, *J. Nonlin. Opt. Phys. Mater.* **16**, 1 (2007).
2. J. Bravo-Abad, A. Rodriguez, P. Bermel, S.G. Johnson, J.D. Joannopoulos, and M. Soljačić, *Opt. Express* **15**, 16161 (2007).
3. A.R. McGurn and G. Birkok, *Phys. Rev. E* **69**, 235105 (2004).
4. A.E. Miroshnichenko, S.F. Mingaleev, S. Flach, and Y.S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **71**, 036626 (2005).
5. K. Frizyuk, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, F32 (2019).
6. A.R. McGurn, *Phys. Rev. B* **77**, 115105 (2008).
7. J. Bravo-Abad, S. Fan, S.G. Johnson, J.D. Joannopoulos, and M. Soljačić, *J. Light. Technol.* **25**, 2539 (2007).
8. M. Soljačić, E. Lidorikis, J.D. Joannopoulos, and L.V. Hau, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 171101 (2005).
9. D. Vujic and S. John, *Phys. Rev. A* **72**, 013807 (2005).
10. E. Bulgakov, K. Pichugin, and A. Sadreev, *J. Phys. Condens. Matter* **25**, 395304 (2013).
11. X-S. Lin, W-O. Wu, H. Zhou, K-F. Zhou, and S. Lan, *Opt. Express* **14**, 2429 (2006).

12. S.F. Mingaleev and Y.S. Kivshar, *J. Opt. Soc. Amer.* **19**, 2241 (2002).
13. S.F. Mingaleev, A.E. Miroshnichenko, Y.S. Kivshar, and K. Busch, *Phys. Rev. E* **74**, 046603 (2006).
14. L. Yuan and Y.Y. Lu, *SIAM J. Appl. Math.* **80**, 864 (2020).
15. M. Bahl, N.C. Panoiu, and I.V. Iorsh, Jr, *Phys. Rev. E* **67**, 056604 (2003).
16. A. Rodriguez, M. Soljačić, J.D. Joannopoulos, and S.G. Johnson, *Opt. Express* **15**, 7303 (2007).
17. J. Wang, M. Clementi, M. Minkov, A. Barone, J.-F. Carlin, N. Grandjean, D. Gerace, S. Fan, M. Galli, and R. Houdré, *Optica* **7**, 1126 (2020).
18. H.M. Gibbs, *Optical Bistability: Controlling Light with Light*, Academic Press (1985).
19. F. Zhou, Y. Liu, Z.-Y. Li, and Y. Xia, *Opt. Express* **18**, 13337 (2010).
20. Y. Liu, F. Qin, Y. Xia, F. Zhou, and Z.-Y. Lia, *J. Appl. Phys.* **106**, 083102 (2009).
21. E.N. Bulgakov and A.F. Sadreev, *J. Opt. Soc. Amer. B* **29**, 2924 (2012).
22. M.M. Mazumder, S.C. Hill, D.Q. Chowdhury, and R.K. Chang, *J. Opt. Soc. Amer. B* **12**, 297 (1995).
23. M.F. Yanik, S. Fan, and M. Soljačić, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 2739 (2003).
24. E.N. Bulgakov, K.N. Pichugin, and A.F. Sadreev, *Opt. Express* **23**, 20636 (2015).
25. J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, J.N. Winn, and R.D. Meade, *Photonic Crystals: Molding Flow of Light*, Princeton Univ. press (2008).
26. K. Koshelev, G. Favraud, A. Bogdanov, Y. Kivshar, and A. Fratalocchi, *Nanophotonics* **8**, 725 (2019).
27. D. Dolinina and A. Yulin, *Opt. Lett.* **45**, 3781 (2020).
28. S.D. Krasikov, A.A. Bogdanov, and I.V. Iorsh, *Phys. Rev. B* **97**, 224309 (2018).
29. A. Chukhrov, S. Krasikov, A. Yulin, and A.A. Bogdanov, *Phys. Rev. B* **103**, 214312 (2021).
30. L. Yuan and Y.Y. Lu, *Phys. Rev. A* **94**, 013852 (2016).
31. L. Yuan and Y.Y. Lu, *Phys. Rev. A* **95**, 023834 (2017).
32. L. Yuan and Y.Y. Lu, *Opt. Express* **23**, 20636 (2015).
33. Q. Yang, Y. Liu, X. Gan, C. Fang, G. Han, and Y. Hao, *IEEE Photon. J.* **12**, 4601209 (2020).
34. E.N. Bulgakov and D.N. Maksimov, *Sci. Rep.* **9**, 7153 (2019).
35. D.N. Maksimov, A.A. Bogdanov, and E.N. Bulgakov, *Phys. Rev. A* **102**, 033511 (2020).
36. E.N. Bulgakov and A.F. Sadreev, *Phys. Rev. A* **99**, 033851 (2019).
37. T. Peschel, U. Peschel, and F. Lederer, *Phys. Rev. A* **50**, 5153 (1994).
38. L. Yuan, *2015 IEEE Int. Conf. on Computational Electromagnetics (2015)*, p. 212.
39. L. Yuan and Y.Y. Lu, *Opt. Express* **22**, 30128 (2014).
40. B. Maes, M. Soljačić, J.D. Joannopoulos, P. Bienstman, R. Baets, S.-P. Gorza, and M. Haelterman, *Opt. Express* **14**, 10678 (2006).
41. E. Bulgakov, A. Sadreev, and K. Pichugin, in: *Progress in Optical Science and Photonics* (2013), p. 89.
42. E.N. Bulgakov and A.F. Sadreev, *Phys. Rev. E* **86**, 075125 (2012).
43. A. Mirzaei, A.E. Miroshnichenko, N.A. Zharova, and I.V. Shadrivov, *J. Opt. Soc. Amer. B* **31**, 1595 (2014).
44. E. Bulgakov and A. Sadreev, *J. Phys. Condens. Matter* **23**, 315303 (2011).
45. L. Yuan and Y.Y. Lu, *Opt. Express* **21**, 11952 (2013).
46. E. Centeno and D. Felbacq, *Phys. Rev. B* **62**, 7683 (2000).
47. T. Christopoulos, O. Tsilipakos, and E.E. Kriezis, *Opt. Lett.* **45**, 6442 (2020).
48. Y. Liang, C. Peng, K. Sakai, S. Iwahashi, and S. Noda, *Opt. Express* **20**, 15945 (2012).
49. K. Yasumoto, *Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystals*, Taylor and Francis Group (2006).
50. M.I. Mishchenko, L.D. Travis, and A.A. Lacis, *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles (Revised electronic edition)*, Goddard Institute for Space Studies (2004).