

ОБРАЗОВАНИЕ СВЕРХМАССИВНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ МЕХАНИЗМОМ СКАЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Ю. Г. Игнатъев*

Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет
420008, Казань, Россия

Поступила в редакцию 26 ноября 2025 г.,
после переработки 1 декабря 2025 г.
Принята к публикации 1 декабря 2025 г.

Исследована математическая модель развития локализованных сферических возмущений в космологической среде скалярно заряженной жидкости с хиггсовым скалярным полем. Показана возможность аномально быстрого роста сингулярной массы (10^{25} -кратное) за времена порядка нескольких сотен планковских времен на стадиях перехода космологической модели из неустойчивого состояния в устойчивое. После завершения перехода центральная масса фиксируется, а центральный скалярный заряд обращается в нуль. При этом радиус локализации является сопутствующим во Вселенной Фридмана. Исследованы особенности процесса образования черной дыры и показана принципиальная возможность образования сверхмассивных черных дыр в ранней Вселенной механизмом скалярно-гравитационной неустойчивости.

Ключевые слова: скалярно заряженная жидкость, космологическая модель, скалярное поле с самодействием, гравитационная устойчивость, продольные возмущения, сверхмассивные черные дыры.

DOI: 10.31857/S3034641X26010033

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена теоретической проблеме раннего образования, т. е. при возрасте Вселенной менее одного миллиарда лет, $z \gtrsim 6$, сверхмассивных черных дыр (supermassive black holes, SMBH), $\sim 10^9 M_\odot$, в центрах квазаров и их зародышей (seeds of supermassive black holes, SSBH) [1–9] (см. также обзор [10]):

$$m_{SSBH} \sim 10^4 \div 10^6 M_\odot \approx 10^{42} \div 10^{44} m_{Pl}. \quad (1)$$

Одна сторона этой проблемы заключается в невозможности объяснения столь раннего происхождения таких массивных объектов прямыми механизмами гравитационной неустойчивости газа, поскольку степенной газодинамический закон роста возмущений со временем не обеспечивает достаточно высокой скорости этого процесса. Существующие же механизмы многоэтапного формирования SSBH (см.

обзор [10]) либо являются многоступенчатыми, требующими специального совпадения условий формирования промежуточных объектов на каждом этапе, либо являются экзотическими. Проблема же заключается не в том, чтобы обосновать возможность образования SSBH при удачном стечении астрофизических условий, а в объяснении их *регулярного и закономерного образования в больших количествах в очень ранние моменты космологической истории*. Другая сторона проблемы заключается в том, что на самых ранних этапах космологического расширения $z \gtrsim 7$ масса SMBH уже сравнима с массой квазаров [10]. А этот факт ставит для газодинамических теорий более сложный вопрос — не являются ли, наоборот, квазары результатом образования SMBH?

В связи с указанной проблемой в [11–13] построена теория плоских и сферических возмущений в космологической среде скалярно заряженной идеальной жидкости с хиггсовым взаимодействием, а в [14, 15] исследован механизм *скалярно-гравитационной неустойчивости* применительно к теории образования SMBH. Как показано в этих работах, в космологических моделях, основанных

* E-mail: yurii.ignatjev.1947@yandex.ru

на скалярных хиггсовых полях и скалярно заряженной жидкости, на ранних стадиях инфляции возникает сильная неустойчивость скалярного поля, приводящая к его *экспоненциальному росту*, но при этом продольные гравитационные возмущения остаются устойчивыми, т.е. гравитационная масса возмущений не растет, а если и растет, то весьма слабо. Такая ситуация возникает вследствие обращения в нуль линейного тензора энергии-импульса (ТЭИ) возмущений в особых точках космологической системы, соответствующих состояниям инфляции. В связи с этим в [14] было предложено два пути выхода из этой тупиковой для образования SSBH ситуации. Первая возможность развития экспоненциальной неустойчивости продольных гравитационных возмущений в линейной модели связана с генерацией гравитационных возмущений на этапе перехода фоновой космологической системы из состояния неустойчивой инфляции в состояние устойчивой, когда в отличие от инфляционных состояний становятся ненулевыми компоненты линейного ТЭИ возмущений. Вторая возможность обеспечения роста продольных гравитационных возмущений даже в особых точках космологической системы связана с квадратичной генерацией гравитационных возмущений экспоненциально растущим скалярным полем.

В этой статье мы исследуем первую возможность развития экспоненциальной неустойчивости гравитационных возмущений на стадиях перехода космологической модели из неустойчивого состояния в устойчивое и тем самым — возможность генерации массы SSBH.

2. МОДЕЛЬ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СФЕРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. Самосогласованная система уравнений

В качестве модели материи рассмотрим модель, предложенную в [12], основанную на идеальной скалярно заряженной жидкости и классическом поле Хиггса Φ с потенциальной энергией

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4} \left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2. \quad (2)$$

Компоненты ТЭИ скалярного поля, S_k^i , и скалярно заряженной жидкости, T_k^i , равны

$$S_k^i = \frac{1}{8\pi} \left(\Phi^{,i} \Phi_{,k} - \frac{1}{2} \delta_k^i \Phi_{,j} \Phi^{,j} + V(\Phi) \delta_k^i \right), \quad (3)$$

$$T_k^i = (\varepsilon + p) u^i u_k - \delta_k^i p, \quad (4)$$

где u^i — единичный времениподобный вектор динамической скорости жидкости, $(u, u) = 1$.

При этом уравнение для скалярного поля Φ есть $\Delta\Phi + V'_\Phi = -8\pi\sigma \Rightarrow \Delta\Phi + \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) = -8\pi\sigma$, (5) где σ — плотность скалярного заряда, а уравнения Эйнштейна для системы «скалярное поле+идеальная жидкость» имеют вид

$$R_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i R = 8\pi(T_k^i + S_k^i) + \delta_k^i \Lambda_0, \quad (6)$$

где Λ_0 — затравочное значение космологической постоянной, связанное с ее перенормированным значением Λ , соответствующим нулевому значению потенциала скалярного поля $\Phi = 0$ на поздних стадиях космологической эволюции,

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{m^4}{4\alpha}, \quad \Lambda \leq \Lambda_0. \quad (7)$$

Здесь и далее латинские индексы пробегают значения $\overline{1,4}$, греческие — $\overline{1,3}$. Всюду используется планковская система единиц $G = c = \hbar = 1$.

Для замыкания системы уравнений (5), (6) три макроскопических скаляра ε, p и σ в случае достаточно малого приведенного скалярного заряда g связываются линейными соотношениями, подобными уравнению состояния:

$$g^2 \Phi^2 \ll 1 : \sigma \simeq g^2 \Phi \varepsilon; p \simeq \frac{1}{3} \varepsilon (1 - g^2 \Phi^2). \quad (8)$$

Эти связи получаются на основе точной микроскопической теории [16] в пределе малого скалярного заряда [12, 13].

2.2. Фоновое состояние

В качестве фонового состояния рассмотрим пространственно плоскую метрику Фридмана в сферической системе координат:

$$ds_0^2 = dt^2 - a^2(t) d\ell_0^2, \quad (9)$$

$$d\ell_0^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

и однородное изотропное распределение материи, в котором все гидродинамические функции и скалярное поле зависят только от космологического времени t :

$$\Phi = \Phi(t), \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \quad p = p(t), \quad u^i = \delta_4^i. \quad (10)$$

При этом ТЭИ скалярного поля в фоновом состоянии принимает вид ТЭИ изотропной жидкости:

$$S^{(0)\beta} = -\frac{1}{16\pi a^2} \dot{\Phi}_0^2 - \frac{\alpha}{32\pi} \left(\Phi_0^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2 \stackrel{def}{=} -p_s, \quad (11)$$

$$S_4^{(0)4} = \frac{1}{16\pi a^2} \dot{\Phi}_0^2 - \frac{\alpha}{32\pi} \left(\Phi_0^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2 \stackrel{def}{=} \varepsilon_s,$$

и с учетом уравнения скалярного поля

$$\ddot{\Phi} + \frac{3}{a}\dot{a}\dot{\Phi} + m_0^2\Phi - \alpha\Phi^3 = -8\pi\sigma \quad (12)$$

законы сохранения суммарного ТЭИ сводятся к одному уравнению:¹⁾

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0. \quad (13)$$

Таким образом, система фоновых уравнений космологической модели на основе скалярного поля и идеальной жидкости, т.е. *динамическая система* \mathbf{S}_5 в пятимерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_5 = \{\xi, H, \Phi, Z, \varepsilon\}$, записывается как (см. [12])

$$\dot{\xi} = H, \quad (14)$$

$$\dot{\Phi} = Z, \quad (15)$$

$$\dot{H} = -\frac{Z^2}{2} - 4\pi(\varepsilon + p), \quad (16)$$

$$\dot{Z} = -3HZ - \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) - 8\pi\sigma, \quad (17)$$

$$\dot{\varepsilon} = -3(\varepsilon + p)H, \quad (18)$$

где $\xi(t) = \ln a(t)$ — так называемое число «е-фолдов» N , $H(t) = \dot{\xi}$ — параметр Хаббла. Первым интегралом системы (14)–(18), интегралом энергии, с нулевым значением константы является уравнение Эйнштейна (6) с индексами $\frac{4}{4}$:

$$3H^2 - \frac{Z^2}{2} - 8\pi\varepsilon + \frac{\alpha}{4}\left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 - \Lambda_0 = 0. \quad (19)$$

При подстановке связей (8) система динамических уравнений (14)–(18) становится полной и описывает невозмущенное фоновое состояние космологической системы.

2.3. Особые точки модели

Динамическая система \mathbf{S}_5 содержит автономную подсистему \mathbf{S}_5 (15)–(18) в фазовом подпространстве $\mathbb{R}_4 = \{H, \Phi, Z, \varepsilon\}$, из которой следуют алгебраические уравнения для определения координат особых точек M_s (детали см. в [12, 13]):

$$Z = 0, \quad \varepsilon + p = 0, \quad \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) = 0; \quad (20)$$

$$\varepsilon_s = 0, \quad p_s = 0, \quad \sigma_s = 0. \quad (21)$$

Подстановка решений уравнений (20), (21) в интеграл (19) дает значение $H = H_s$ в особой точке:

$$H_s = \pm\sqrt{\frac{\Lambda_s}{3}}, \quad \Lambda_s \stackrel{def}{=} \Lambda_0 - \frac{\alpha}{4}\left(\Phi_s^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2. \quad (22)$$

¹⁾ Здесь и далее точкой обозначены производные по t , штрихом — производные по r .

Особые точки динамической системы \mathbf{S}_4 совпадают с особыми точками скалярно-вакуумной динамической системы $\mathbf{S}^{(00)}$ [17, 18]:

$$M_0 = [H_0, 0, 0, 0], \quad M_s = [H_s, \Phi_s, 0, 0]. \quad (23)$$

Для существования особых точек необходима вещественность H_s , т.е.

$$\Lambda_s = \Lambda_0 - \frac{\alpha}{4}\left(\Phi_s^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 \geq 0. \quad (24)$$

Из (22) следует, что

$$\Lambda_s \leq \Lambda_0. \quad (25)$$

Качественный анализ динамической системы \mathbf{S}_4 [12] приводит к следующим выводам.

1. Все особые точки M_s являются седловыми, т.е. неустойчивыми.

2. Единственная точка M_0 при условии

$$3\Lambda - 4m^2 < 0 \quad (26)$$

является притягивающим фокусом, т.е. условно устойчивой точкой.

3. Координаты особых точек $M(H_s, \Phi_s, Z_s, \varepsilon_s)$ фоновой динамической системы (15)–(18) равны

$$M_0^\pm = \left[\pm\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}, 0, 0, 0 \right], \quad (27)$$

$$M_\pm^\pm = \left[\pm\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}, \pm\frac{m}{\sqrt{\alpha}}, 0, 0 \right],$$

где космологические постоянные Λ и Λ_0 связаны соотношением (7), причем всегда $\Lambda < \Lambda_0$.

При выполнении условия (20) фоновые уравнения гравитационного и скалярного полей сводятся к единственному нетривиальному уравнению Эйнштейна (19):

$$\Phi_s = 0 \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}, \quad (28)$$

$$\Phi_s = \pm\frac{m}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda_0}{3}.$$

Отсюда получаем известные инфляционные решения для масштабного фактора (см., например, [19]), обусловленные значениями космологической постоянной

$$a(t) = e^{\pm H_s t} : \quad \Phi_s = 0 \Rightarrow H_s = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}};$$

$$\Phi_s = \pm\frac{m}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow H_s = \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}.$$

Особые точки динамической системы представляют собой ее *точные решения*. В случае притягивающей особой точки это решение является устойчивым, а в случае седловой или отталкивающей — точное решение неустойчиво.

2.4. Масштабные преобразования модели

Конкретная фоновая модель \mathbf{S}_5 определяется, во-первых, фундаментальными физическими параметрами, которые будем задавать упорядоченным списком $\mathbf{P} = [\alpha, m, g, \Lambda_0]$, и, во-вторых, начальными условиями в виде упорядоченного списка значений координат фазового пространства в нулевой момент космологического времени $t_0 = 0$: $\{\xi(0), H(0), \Phi(0), Z(0), \varepsilon(0)\}$, который с учетом ее первого интеграла (19) и автономности динамической системы \mathbf{S}_5 всегда можно свести к списку трех величин $\mathbf{I} = [\Phi_s, Z_0, \varepsilon_0, \varkappa]$, где по умолчанию $\xi(0) = 0$, а $\varkappa = \pm 1$ — знак решения уравнения (19) относительно H в точке $t = 0$.

При анализе численных решений динамической системы \mathbf{S}_5 важное значение имеет следующее ее свойство, доказанное в работе [18].

Полная система уравнений модели \mathbf{S}_5 инвариантна по отношению к одновременным масштабным преобразованиям с коэффициентом подобия $\ell = \text{const} > 0$ фундаментальных параметров (29) и фазовых координат (30) модели

$$S_\ell(\mathbf{S}_5) : \alpha = \ell^2 \tilde{\alpha}, \quad m = \ell \tilde{m}, \quad g = \sqrt{\ell} \tilde{g}, \quad \Lambda_0 = \ell^2 \tilde{\Lambda}_0, \quad (29)$$

$$x^i = \ell^{-1} \tilde{x}^i, \quad \Phi = \tilde{\Phi}, \quad Z = \ell \tilde{Z}, \quad H = \ell \tilde{H}, \quad \varepsilon = \ell^2 \tilde{\varepsilon}. \quad (30)$$

При масштабных преобразованиях (29), (30) координаты особых точек также преобразуются по законам (30), а собственные значения матрицы динамической системы — по закону $\lambda = \ell \tilde{\lambda}$ [18].

Будем называть модели, связанные преобразованием подобия, *подобными моделями*. Свойство подобия позволяет сравнивать космологические модели на различных масштабах взаимодействий. В этой статье мы рассмотрим следующие величины фундаментальных параметров базовых моделей на различных масштабах взаимодействий:

- базовая модель на планковских масштабах $\ell = 1$ — $\mathbf{S}_{Pl} : \mathbf{P}_0 = [1, 1, 10^{-1}, 0.2527]$; $t = 1$;
 - модель великого объединения $\ell = 10^{-4}$ — $\mathbf{S}_{SU(5)} : \mathbf{P}_1 = [10^{-8}, 10^{-4}, 10^{-3}, 2.527 \cdot 10^{-9}]$; $t = 10^4$;
 - стандартная модель $\ell = 10^{-15}$ — $\mathbf{S}_{SM} : \mathbf{P}_2 = [10^{-30}, 10^{-15}, 3 \cdot 10^{-9}, 2.527 \cdot 10^{-31}]$; $t = 10^{15}$.
- Величину скалярного заряда g , как и космологическую постоянную Λ_0 , будем варьировать в каждой модели.

2.5. Сферические возмущения

Метрику с гравитационными возмущениями запишем в изотропных сферических координатах с конформно-евклидовой метрикой трехмерного пространства $d\ell_0^2$ (см., например, [20]), допускающей непрерывный переход к метрике Фрийдмана (9) [13] (можно строго показать, что в исследуемой модели возмущения метрики Фрийдмана описываются одной скалярной функцией $\nu(r, t)$ [11]):

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} dt^2 - a^2(t) e^{-\nu(r,t)} d\ell_0^2, \quad (31)$$

где $\nu(r, t)$ — малое продольное возмущение метрики Фрийдмана ($\nu \ll 1$). Метрика (31) допускает инфинитезимальное преобразование по временной переменной:

$$\nu(r, t) \rightarrow \nu(r, t) + \delta\xi(t), \quad t \rightarrow t + \frac{1}{2} \int \delta\xi dt, \quad (32)$$

не изменяющее ее вида. Эту трансформационную симметрию метрики (31) мы используем в дальнейшем.

Положим для возмущений скалярного поля, плотности энергии и вектора скорости жидкости:

$$\Phi(r, t) = \Phi(t) + \phi(r, t), \quad \varepsilon(r, t) = \varepsilon(t) + \delta\varepsilon(r, t),$$

$$p(r, t) = p(t) + \delta p(r, t), \quad \sigma(r, t) = \sigma(t) + \delta\sigma(r, t),$$

$$u^i = \exp\left(-\frac{\nu(r, t)}{2}\right) \delta_4^i + \frac{\nu(r, t)}{a^2} \delta_4^i,$$

где $\Phi(t)$, $\varepsilon(t)$ и $p(t)$ — невозмущенные (фоновые) значения соответствующих величин, а $\phi(r, t)$, $\nu(r, t)$ и $\delta\varepsilon(r, t)$ — их малые возмущения. Отсюда для модели (8) получаем

$$\sigma = e^2 \Phi_0 \varepsilon, \quad \delta p = \frac{1}{3} [\delta\varepsilon(1 - e^2 \Phi^2) - 2e^2 \varepsilon \Phi \phi], \quad (33)$$

$$p = \frac{1}{3} \varepsilon(1 - e^2 \Phi^2), \quad \delta\sigma = e^2 (\phi\varepsilon + \Phi\delta\varepsilon).$$

2.6. Уравнения для возмущений модели

Отличные от нуля возмущения компонент суммарного тензора энергии-импульса имеют вид

$$8\pi\delta(S_\beta^\beta + T_\beta^\beta) = \phi\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) - \dot{\phi}\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\nu\dot{\Phi}^2 - 8\pi\delta p, \quad \beta = \overline{1, 3}; \quad (34)$$

$$8\pi\delta(S_4^4 + T_4^4) = \phi\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) + \dot{\phi}\dot{\Phi} - \frac{1}{2}\nu\dot{\Phi}^2 + 8\pi\delta\varepsilon; \quad (35)$$

$$8\pi\delta(S_4^1 + T_4^1) = \dot{\Phi}\phi' - \nu(\varepsilon + p) \Rightarrow \Rightarrow -\frac{1}{a^2} \delta(S_1^4 + T_1^4) = \delta(S_4^1 + T_4^1). \quad (36)$$

Полагая $\varepsilon \neq 0$, получим из возмущенного уравнения Эйнштейна $\frac{1}{4}$ определение радиальной скорости:

$$v = \frac{3}{8\pi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{Z\phi - \dot{\nu} - H\nu}{\varepsilon(4 - e^2\Phi^2)}, \quad (37)$$

а из уравнения $\frac{4}{4}$ — выражение для возмущения плотности энергии жидкости:

$$8\pi\delta\varepsilon = \frac{1}{a^2}\Delta_r\nu - 3H\dot{\nu} - \left(3H^2 - \frac{Z^2}{2}\right)\nu - Z\dot{\phi} - \Phi_0(m^2 - \alpha\Phi_0)\phi, \quad (38)$$

где Δ_r — радиальная часть оператора Лапласа в сферических координатах трехмерного евклидова пространства (детали см. в [14] и [15]),

$$\Delta_r\phi \stackrel{def}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (39)$$

Подставляя (38) в правую часть уравнения возмущенного уравнения Эйнштейна $\frac{1}{1}$, получим при условии $\varepsilon \neq 0$ систему двух однородных линейных уравнений в частных производных второго порядка типа Лифшица [21]:

$$\ddot{\phi} + o_q^m \dot{\nu} + o_q^q \dot{\phi} - \frac{1}{a^2} \Delta_r(\phi - g^2\Phi\nu) + p_q^q \phi + p_q^m \nu = 0, \quad (40)$$

$$\ddot{\nu} + o_m^m \dot{\nu} + o_m^q \dot{\phi} - \frac{1-g^2\Phi^2}{3a^2} \Delta_r\nu + p_m^m \nu + p_m^q \phi = 0. \quad (41)$$

Здесь введены $o_b^a(t)$ и $p_b^a(t)$ — функции, определяемые решениями $\{\xi(t), H(t), \Phi(t), Z(t), \varepsilon(t)\}$ фоновой динамической системы (14)–(18):

$$o_m^m = (3 - g^2\Phi^2)H, \quad o_m^q = -\frac{2 + g^2\Phi^2}{3}Z, \\ p_m^m = -\frac{1}{3} \left[(1 - g^2\Phi^2) \frac{Z^2}{2} + 4\pi\varepsilon(4 - g^2\Phi^2) \right], \\ p_m^q = \frac{1}{3} [(2 + g^2\Phi^2)ZH + (4 - g^2\Phi^2)\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) + 16\pi\varepsilon g^2\Phi], \quad (42)$$

$$o_q^m = -(2Z + 3g^2\Phi H), \quad o_q^q = (H - g^2\Phi Z), \\ p_q^q = \left[\frac{Z^2}{2} - 2H^2 + g^2\Phi ZH + m^2 - 3\alpha\Phi^2 - g^2\Phi^2(m^2 - \alpha\Phi^2) + \frac{4\pi\varepsilon}{3}(4 - g^2\Phi^2 + 6g^2) \right], \\ p_q^m = \left[2ZH + \frac{Z^2}{2}g^2\Phi + \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) + 8\pi g^2\Phi\varepsilon \right]. \quad (43)$$

Система двух однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных (40), (41) является полностью определенной относительно двух функций $\phi(r, t)$ и $\nu(r, t)$.

3. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

3.1. Выделение сингулярных частей возмущений

Наличие оператора Лапласа Δ_r в уравнениях для возмущений метрики (41) и скалярного поля (40) приводит к появлению сингулярных решений вида $1/r$ этих уравнений. С другой стороны, эти решения подразумевают наличие сингулярных в начале координат источников массы $M(t)$ и заряда $Q(t)$:

$$\Delta \left(-\frac{M}{r} \right) = 4\pi M\delta(\mathbf{r}); \\ \Delta \left(-\frac{Q}{r} \right) = 4\pi Q\delta(\mathbf{r}). \quad (44)$$

Для рассмотрения сингулярных решений вида $\phi \sim 1/r$, $\nu \sim 1/r$ необходимо включить сингулярные источники в правые части полевых уравнений (5), (6), добавляя сингулярные части к возмущениям плотности энергии и скалярного заряда:

$$\delta\varepsilon(r, t) \rightarrow \delta\varepsilon(r, t) + M(t)\delta(r),$$

$$\delta\sigma(r, t) \rightarrow \delta\sigma(r, t) + Q(t)\delta(r),$$

где $\delta(r)$ — радиальная $\delta(r)$ -функция в пространстве Фридмана, такая что

$$\int \delta(r)dV = 4\pi a^3 \int r^2\delta(r)dr = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta_r \left(-\frac{1}{r} \right) = 4\pi a^3\delta(r) \Rightarrow \frac{1}{a^2}\Delta_r \left(-\frac{1}{ar} \right) = 4\pi\delta(r).$$

Заметим, что величина $R = a(t)r$ есть физический радиус в метрике Фридмана (9).

Выделим в скалярных функциях возмущений $\nu(r, t)$ и $\phi(r, t)$ сингулярные при $r = 0$ части [11, 22]:

$$\nu(r, t) = 2 \frac{\rho(r, t) - M(t)}{ar} \equiv -\frac{2m(r, t)}{a(t)r}, \\ \phi(r, t) = 2 \frac{\chi(r, t) - Q(t)}{ar} \equiv -\frac{2q(r, t)}{a(t)r}, \quad (45)$$

где несингулярные части возмущений, $\rho(r, t)$ и $\chi(r, t)$, удовлетворяют соотношениям

$$\rho(0, t) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial r} = 0, \quad \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho}{r} \right| < \infty; \quad (46)$$

$$\chi(0, t) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \chi(r, t)}{\partial r} = 0, \quad \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\chi}{r} \right| < \infty, \quad (47)$$

так что

$$\frac{1}{a^2}\Delta \frac{\rho - M}{ar} = \frac{\rho''}{a^3r^2} + 4\pi M(t)\delta(r), \\ \frac{1}{a^2}\Delta \frac{\chi - Q}{ar} = \frac{\chi''}{a^3r^2} + 4\pi Q(t)\delta(r).$$

Возмущенную метрику (31) в линейном по малости возмущений приближении можно записать в виде метрики, конформной метрике Шварцшильда, с физическим радиусом $R = ar$ и *полной массой* $m(r, t)$ шара радиусом r [23], а потенциал возмущенного скалярного поля — в виде кулоновского потенциала с зарядом $q(r, t)$ внутри этой же сферы (см. [11]):

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2m(r, t)}{a(t)r} \right] dt^2 - \frac{dr^2 + r^2(d\Omega^2 + \sin^2 \Omega d\varphi^2)}{1 - \frac{2m(r, t)}{a(t)r}}. \quad (48)$$

В связи с этим мы будем связывать решения с $M(t) \neq 0$, $Q(t) \neq 0$ со скалярными черными дырами, помня о том, что решение типа (48) является линейной моделью черной дыры (см. [24]). Заметим, что калибровочное преобразование (32) эквивалентно следующим преобразованиям функций $m(r, t)$ и $\rho(r, t)$:

$$\begin{aligned} m(r, t) &\rightarrow m(r, t) - \frac{ar}{2} \delta\xi(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho(r, t) \rightarrow \rho(r, t) + ar \frac{\delta\xi(t)}{2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Проведя далее подстановку (45) в уравнения для возмущений (41) и (40), получим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений относительно четырех функций. Разделяя полученные уравнения на сингулярные и несингулярные на основе свойства таких систем [11], получим две системы уравнений, первая из которых является однородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $M(t)$, $Q(t)$, а вторая — однородной системой линейных уравнений в частных производных относительно несингулярных функций $\rho(r, t)$, $\chi(r, t)$:

$$\ddot{M} + o_m^m(t)\dot{M} + o_m^q(t)\dot{Q} + p_m^m(t)M + p_m^q(t)Q = 0, \quad (50)$$

$$\ddot{Q} + o_q^m(t)\dot{M} + o_q^q(t)\dot{Q} + p_q^m(t)M + p_q^q(t)Q = 0; \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} + o_m^m(t)\dot{\rho} + o_m^q(t)\dot{\chi} - \frac{2 - g^2\Phi^2}{3a^2}\rho'' + \\ + p_m^m(t)\rho + p_m^q(t)\chi = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\chi} + o_q^m(t)\dot{\rho} + o_q^q(t)\dot{\chi} - \frac{1}{a^2}(\chi - g^2\Phi\rho)'' + \\ + p_q^m(t)\rho + p_q^q(t)\chi = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Отметим следующие весьма важные свойства систем уравнений (50), (51) и (52), (53), которые мы используем в дальнейшем.

Во-первых, коэффициенты при неизвестных функциях и их производных в этих двух системах уравнений совпадают.

Во-вторых, эти коэффициенты зависят только от времени. Это означает, что если $M(t)$, $Q(t)$ являются решениями системы (50), (51), то пропорциональные им решения $\text{const} \cdot M(t)$, $\text{const} \cdot Q(t)$ являются решениями системы (52), (53).

В-третьих, производные по радиусу входят в систему (52), (53) только в виде вторых производных.

3.2. Локализация возмущений

Метод *локализованных возмущений* был применен в [22, 25] при решении задачи об эволюции черной дыры во Вселенной, заполненной идеальной жидкостью. Он заключается в локализации сферических возмущений внутри сферы с определенным радиусом r_0 , возможно, зависящим от времени. На этом радиусе задаются нулевые граничные условия такие, чтобы вне сферы $\Sigma(r_0)$ метрика и любое возмущение, вносимое черной дырой, исчезало. Очевидно, это требует равенства на сфере нулю возмущений и их производных. В указанных работах сфера $\Sigma(r_0)$ определялась звуковым горизонтом Вселенной, т.е. задавалась уравнением $r_0 = v_s t$, где $v_s = \text{const}$ — скорость звука. При этом выполнялся принцип причинности — за звуковым горизонтом наблюдатель не имеет информации о гравитационном поле черной дыры. Вследствие теоремы Биркгофа локализация сферических возмущений предполагает, что возмущения внутри сферы $\Sigma(r_0)$ получаются только перераспределением полной энергии, заключенной первоначально внутри этой сферы.

Итак, пусть в момент времени t_0 сферически-симметричное возмущение образовалось внутри моментальной сферы $\Sigma(r_0)$:

$$\begin{aligned} \rho(r, t_0) &\equiv \rho_0(r), \quad \chi(r, t_0) \equiv \chi_0(r), \quad r \in [0, r_0]; \\ \dot{\rho}(r, t_0) &\equiv \dot{\rho}_0(r), \quad \dot{\chi}(r, t_0) \equiv \dot{\chi}_0(r). \end{aligned} \quad (54)$$

Для локализованных возмущений это означает, что на границе этой сферы выполняются нулевые граничные условия. Используя определения (45), получим

$$\begin{aligned} \nu(r_0, t_0) = 0 &\Leftrightarrow \rho_0(r_0) = M_0, \\ \nu'(r_0, t_0) = 0 &\Leftrightarrow \rho'_0(r_0) = 0, \\ \dot{\nu}(r_0, t_0) = 0 &\Leftrightarrow \dot{\rho}_0(r_0) = \dot{M}_0, \\ \phi(r_0, t_0) = 0 &\Leftrightarrow \chi_0(r_0) = Q_0, \\ \phi'(r_0, t_0) = 0 &\Leftrightarrow \chi'_0(r_0) = 0, \\ \dot{\phi}(r_0, t_0) = 0 &\Leftrightarrow \dot{\chi}_0(r_0) = \dot{Q}_0. \end{aligned} \quad (55)$$

Заметим, что начальные и граничные условия для несингулярных частей возмущений $\rho(r, t)$ и $\chi(r, t)$ определяются через начальные условия для сингулярных частей возмущений $M_0, Q_0, \dot{M}_0, \dot{Q}_0$. Это, во-первых, означает, что, хотя системы уравнений на сингулярные (50), (51) и несингулярные (52), (53) части возмущений независимы друг от друга, но через начальные и граничные условия локализации возмущений решения этих уравнений становятся зависимыми друг от друга. Во-вторых, это означает, что именно несингулярные части возмущений определяются сингулярными решениями, а не наоборот. Это весьма важное свойство локализованных возмущений, согласно которому эволюция сингулярных массы и скалярного заряда черной дыры не зависит от структуры сферических возмущений в области локализации.

Далее, условия (46), (47) обеспечивают равенство нулю возмущений в точке $r = 0$ в начальный момент времени t_0 , но не обеспечивают равенство нулю временных производных. Поэтому добавим соответствующие условия, обеспечивая тем самым корректность задачи Коши (см., например, [26]):

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(0, t_0) = 0 &\Rightarrow \dot{\rho}_0(0) = \dot{M}_0, \\ \dot{\phi}(0, t_0) = 0 &\Rightarrow \dot{\chi}_0(0) = \dot{Q}_0. \end{aligned} \quad (56)$$

3.3. Полиномиальные решения

Свойства подобия системы уравнений (50)–(53) совместно с положением о локализации возмущений позволяют применить для их решения *полиномиальный метод*, предложенный в [11]. Действительно, полагая, что в конечной окрестности $r \in [0, r_0]$, в которой локализовано возмущение метрики, потенциальные функции $\rho(r, \eta)$ и $\chi(r, \eta)$, удовлетворяющие условиям (46) и (47), принадлежат классу C^∞ , представим решения уравнений (52), (53) в виде степенных рядов, не содержащих членов с нулевой степенью вследствие условий (46) $\rho(0, t) = 0$ и (47) $\chi(0, t) = 0$:

$$\rho(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(t) r^k, \quad \chi(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(t) r^k. \quad (57)$$

Подставляя эти решения в уравнения (52), (53) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $\rho_n(t)$ и $\chi_n(t)$. При этом надо иметь в виду то обстоятельство, что члены со вторыми радиальными производными в исходных уравнениях будут давать члены $(n+2)$ -го

порядка в n -м уравнении. Вследствие того, что члены нулевой степени отсутствуют в степенных рядах (57), из уравнения для нулевой степени мы получим $\rho_2 = \chi_2 = 0$. Повторяя этот процесс для четных n , мы придем к выводу, что члены с четными степенями r должны отсутствовать в степенных рядах (57). Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{2k+1}(t) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k+1}, \\ \chi(r, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{2k+1}(t) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k+1}, \end{aligned} \quad (58)$$

т.е. *потенциальные функции $\rho(r, t)$ и $\chi(r, t)$ являются нечетными функциями r* . Вследствие граничных условий (55) должны выполняться следующие граничные условия для рядов (58):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{2k+1}^0 &= M_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{2k+1}^0 = Q_0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \rho_{2k+1}^0 &= 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \chi_{2k+1}^0 = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\rho}_{2k+1}^0 &= \dot{M}_0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\chi}_{2k+1}^0 = \dot{Q}_0, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\rho_k^0 = \rho_k(0), \quad \chi_k^0 = \chi_k(0), \quad \dot{\rho}_k^0 = \dot{\rho}_k(0), \quad \dot{\chi}_k^0 = \dot{\chi}_k(0).$$

При этом очевидно, что начальные условия в центре (56) тождественно выполняются.

Подставляя разложения (58) в уравнения (52), (53), получим цепочку *зацепляющихся уравнений*:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{2k+1} + o_m^m(t) \dot{\rho}_{2k+1} + o_m^q(t) \dot{\chi}_{2k+1} + \\ + p_m^m(t) \rho_{2k+1} + p_m^q(t) \chi_{2k+1} = \\ = \frac{(2k+2)(2k+3)(2-g^2\Phi^2)}{3r_0^2 a^2} \rho_{2k+3}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} -\ddot{\chi}_{2k+1} + o_q^m(t) \dot{\rho}_{2k+1} + o_q^q(t) \dot{\chi}_{2k+1} + \\ + p_q^m(t) \rho_{2k+1} + p_q^q(t) \chi_{2k+1} = \\ = \frac{(2k+2)(2k+3)}{r_0^2 a^2} (\chi_{2k+3} - g^2\Phi \rho_{2k+3}). \end{aligned} \quad (61)$$

Левые части этих линейных неоднородных уравнений совпадают с левыми частями однородных эволюционных уравнений соответственно для массы (50) и заряда (51) черной дыры. Поэтому общие решения уравнений (60), (61) есть линейные комбинации решений уравнений (50), (51) и любых частных решений ρ_{2k+1}^1 и χ_{2k+1}^1 уравнений (60), (61):

$$\begin{aligned}\rho_{2k+1} &= \tilde{C}_1 M(t) + \rho_{2k+1}^1, \\ \chi_{2k+1} &= \tilde{C}_2 Q(t) + \chi_{2k+1}^1.\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени возмущения $\rho_0(r)$ и $\chi_0(r)$ (54) представимы в виде полиномов степени $s = 2n + 1$:

$$\begin{aligned}\rho_0(r) &= \sum_{k=0}^n \rho_{2k+1}^0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k+1}, \\ \chi_0(r) &= \sum_{k=0}^n \chi_{2k+1}^0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k+1},\end{aligned}\quad (62)$$

т. е. $\rho_{2n+3} = \chi_{2n+3} \equiv 0$. Тогда уравнения для функций ρ_{2n+1} и χ_{2n+1} , соответствующих высшим степеням r , будут иметь вид

$$\begin{aligned}\ddot{\rho}_{2n+1} + o_m^m(t)\dot{\rho}_{2n+1} + o_m^q(t)\dot{\chi}_{2n+1} + \\ + p_m^m(t)\rho_{2n+1} + p_m^q(t)\chi_{2n+1} = 0, \\ \ddot{\chi}_{2n+1} + o_q^m(t)\dot{\rho}_{2n+1} + o_q^q(t)\dot{\chi}_{2n+1} + \\ + p_q^m(t)\rho_{2n+1} + p_q^q(t)\chi_{2n+1} = 0,\end{aligned}$$

т. е. будут совпадать с уравнениями (50), (51). Поэтому решения этих уравнений есть

$$\rho_{2n+1}(t) = C_1 M(t), \quad \chi_{2n+1}(t) = C_2 Q(t). \quad (63)$$

Подставляя эти решения в правые части уравнений (60), (61) для ρ_{2n-1} и χ_{2n-1} , получим полностью определенные уравнения для этих функций. Решая эти уравнения и подставляя решения в уравнения с меньшим индексом, снова получим замкнутые уравнения для функций с меньшим индексом и т. д. Таким образом, мы получим точное решение задачи.

3.4. Кубические полиномы

Наименьшая допустимая степень полинома в (62) равна 3. Рассмотрим поэтому простейший случай кубического полинома:

$$\rho = \rho_1 \frac{r}{r_0} + \rho_3 \frac{r^3}{r_0^3}, \quad \chi = \chi_1 \frac{r}{r_0} + \chi_3 \frac{r^3}{r_0^3}. \quad (64)$$

Начальные граничные условия (59) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned}\rho_1^0 + \rho_3^0 &= M_0, & \rho_0 + 3\rho_3^0 &= 0, \\ \chi_1^0 + \chi_3^0 &= Q_0, & \chi_0 + 3\chi_3^0 &= 0, \\ \dot{\rho}_1^0 + \dot{\rho}_3^0 &= \dot{M}_0, & \dot{\chi}_1^0 + \dot{\chi}_3^0 &= \dot{Q}_0.\end{aligned}\quad (65)$$

Решая уравнения (65) относительно ρ_s^0 и χ_s^0 , найдем, полагая $a(t_0) = 1$, начальные значения функций $\rho_0(r)$ и $\chi_0(r)$ (см. также [22]):

$$\rho_1^0 = \frac{3}{2}M_0, \quad \rho_3^0 = -\frac{1}{2}M_0, \quad \chi_1^0 = \frac{3}{2}Q_0, \quad \chi_3^0 = -\frac{1}{2}Q_0, \quad (66)$$

$$\nu_0(r) = \frac{2M_0}{r} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{r}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{r^3}{r_0^3}\right), \quad (67)$$

$$\phi_0(r) = \frac{2Q_0}{r} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{r}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{r^3}{r_0^3}\right). \quad (68)$$

Подставляя ρ_3^0 и χ_3^0 из (66) в соотношения (63) при $n = 1$ в момент времени t_0 , найдем значения констант C_1 и C_2 :

$$C_1 = C_2 = -\frac{1}{2}, \quad (69)$$

$$(63) \Rightarrow \rho_3(t) = -\frac{M(t)}{2}, \quad \chi_3(t) = -\frac{Q(t)}{2}. \quad (70)$$

Таким образом, получим из (64) выражения для функций для $\rho(r, t)$ и $\phi(r, t)$:

$$\rho(r, t) = \rho_1(t) \frac{r}{r_0} - M(t) \frac{r^3}{2r_0^3}, \quad (71)$$

$$\chi(r, t) = \chi_1(t) \frac{r}{r_0} - Q(t) \frac{r^3}{2r_0^3}. \quad (72)$$

Дифференцируя по времени соотношения (63), найдем, подставляя результат в (66):

$$\dot{\rho}_1^0 = \frac{3}{2}\dot{M}_0, \quad \dot{\chi}_1^0 = \frac{3}{2}\dot{Q}_0, \quad (73)$$

$$\dot{\rho}_3^0 = -\frac{1}{2}\dot{M}_0, \quad \dot{\chi}_3^0 = -\frac{1}{2}\dot{Q}_0. \quad (74)$$

Наконец, подставляя полученные результаты в уравнения (60), (61), получим систему двух обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно функций $\rho_1(t)$ и $\chi_1(t)$:

$$\begin{aligned}\ddot{\rho}_1 + o_m^m(t)\dot{\rho}_1 + o_m^q(t)\dot{\chi}_1 + p_m^m(t)\rho_1 + p_m^q(t)\chi_1 = \\ = -\frac{3(2 - g^2\Phi^2)}{2r_0^2 a^2} M(t),\end{aligned}\quad (75)$$

$$\begin{aligned}-\ddot{\chi}_1 + o_q^m(t)\dot{\rho}_1 + o_q^q(t)\dot{\chi}_1 + p_q^m(t)\rho_1 + p_q^q(t)\chi_1 = \\ = -\frac{3}{2r_0^2 a^2} (M(t) - g^2\Phi Q(t)).\end{aligned}\quad (76)$$

Эти уравнения должны решаться с начальными условиями (66) и (73). Таким образом, в случае кубического полинома задача решена с точностью до интегрирования системы двух обыкновенных уравнений (75), (76).

3.5. Радиус локализации

Логично определить радиус локализации гравитационного возмущения как такой радиус $r_m(t)$, при котором обращается в нуль радиальная производная потенциала $\nu(r, t)$. Вычисляя эту производную, найдем с учетом соотношений (70) и (71):

$$\begin{aligned} \nu'(r, t) = 0 &\Rightarrow r\rho'(r, t) - (\rho(r, t) - M(t)) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2\rho_3(t)r^3 + M(t) = 0 \Rightarrow r_m(t) = r_0. \end{aligned} \quad (77)$$

Таким образом, радиус локализации гравитационного возмущения, определяемый как радиус, при котором исчезает гравитационная сила притяжения возмущения, в изотропных координатах $\{r, \theta, \varphi, t\}$ не изменяется. Очевидно, что и радиус локализации возмущения скалярного поля совпадает с r_0 . При этом физический радиус равен $R = a(t)r$, поэтому физический радиус локализации возмущений растет вместе с расширением Вселенной: $R_m = a(t)r_0$ [11].

Прямое вычисление полной гравитационной массы возмущения $M(r, t)$ внутри сферы радиусом r_0 в соответствии с (45):

$$\nu(r, t) = -\frac{2m(r, t)}{ar} \Rightarrow m(r, t) = -\rho(r, t) + M(t), \quad (78)$$

не приводит к нулевому значению. Заметим, что согласно (71) получим для (78)

$$\nu(r, t) = -\frac{2}{a(t)} \left(\frac{M(t)}{r} + \frac{M(t)r^2}{2r_0^3} - \rho_1(t) \right). \quad (79)$$

Однако мы имеем право добавить к правой части (79) произвольную малую калибровочную функцию времени $\delta\xi(t)$ и совершить преобразование временной переменной (32) согласно правилу (49). Воспользуемся этим инвариантным свойством метрики и выберем функцию $\delta\xi(t)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство $m(r_0, t) = 0$. Это дает

$$\delta\xi(t) = -\frac{2\rho_1(t)}{a(t)} + \frac{3M(t)}{r_0a(t)}. \quad (80)$$

Добавляя теперь $\delta\xi(t)$ из (80) в правую часть (79), для перенормированного потенциала гравитационного возмущения ν_n получим

$$\nu_n(r, t) = -\frac{2M(t)}{ra(t)} \left(1 + \frac{r^3}{2r_0^3} - \frac{3r}{2r_0} \right). \quad (81)$$

Это значение $\nu(r, t)$ автоматически приводит к закону сохранения полной массы внутри области локализации возмущения $m(r_0, t) = 0$. Заметим, что мы

не можем требовать при этом аналогичного сохранения скалярного заряда, так как заряд $Q(t)$ ассоциируется с плотностью скалярного заряда σ (12), которая не связана с законом сохранения в отличие от кинематической плотности заряда $\varrho = gn$, где n — плотность числа зарядов (см. [16]). Здесь остается математическая проблема, которую необходимо решать, по-видимому, переформулировкой задачи с начальными и граничными условиями на стандартную задачу Коши со свободным концом $r_0(t)$. Пока же нам достаточно того, что при $r = r_0$ обращается в нуль градиент скалярного потенциала $\phi'(r_0, t) = 0$, что приводит к равной нулю силе скалярного притяжения на поверхности сферы $\Sigma(r_0)$ во все времена. Кроме того, численное решение задачи (см. разд. 4) автоматически приводит к результату $Q(t \rightarrow \infty) = 0$, что снимает, по существу, остроту проблемы с начальными и граничными условиями.

Заметим также, что согласно (48) гравитационный радиус образованной черной дыры можно определить как $r_g = 2M(t)$. Очевидно, что аналогичные, только более громоздкие вычисления можно проделать и для полиномов более высокого порядка. Так, например, в случае *несингулярных решений*, когда $M(t) \equiv 0$ и $Q(t) \equiv 0$, начальные функции $\rho_0(r)$ и $\chi_0(r)$ должны описываться полиномом не менее пятого порядка, в [11] показано, как решается задача в этом случае.

В заключение этого раздела заметим, во-первых, что *моментальная* сфера $\Sigma(r_0)$ с начальными и граничными условиями (54), определенная в момент времени t_0 , в изотропных координатах оказалась неизменной во все времена, поэтому в конечном итоге начальные и граничные условия оказались соответствующими стандартной постановке задачи Коши. Эта сфера Коши является сопутствующей в метрике Фридмана (9), в терминах наблюдаемого космологического времени t и радиуса $R = a(t)r_0$ радиус сферы Коши растет со скоростью расширения Вселенной $v \stackrel{def}{=} \dot{R} = RH$. Во-вторых, полученная формула (81) для перенормированного гравитационного потенциала с точностью до нахождения численного решения эволюционных уравнений (50), (51) для сингулярной массы $M(t)$ представляет точное решение линейной задачи об эволюции гравитационных возмущений в случае локализованного возмущения в форме кубического полинома. Таким образом, для этого случая возмущений задача об эволюции черной дыры решена полностью. Однако остается еще вопрос об эволюции скалярного поля черной дыры в области локализации возмущения.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

4.1. Иерархия подсистем

Приведенные выше уравнения, определяющие эволюцию возмущений, подчинены следующей иерархии подсистем $\mathbf{S}_0 \rightarrow \mathbf{S}_{MQ} \rightarrow \mathbf{S}_{\rho\chi}$.

1. Фоновая нормальная система пяти обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений \mathbf{S}_0 (14)–(18) относительно базовых функций

$$\mathbf{X} = [X\xi(t), H(t), \Phi(t), Z(t), \varepsilon(t)]$$

с начальными условиями

$$\mathbf{X}_0 = [\xi(0) = 0, H_0, \Phi_0, Z_0, \varepsilon_0]. \quad (82)$$

2. Система \mathbf{S}_{MQ} двух линейных обыкновенных однородных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций массы $M(t)$ и скалярного заряда $Q(t)$ сингулярного источника с начальными условиями

$$\mathbf{I}_{MQ} = [M(0) = M_0, \dot{M}(0) = \dot{M}_0, Q(0) = Q_0, \dot{Q}(0) = \dot{Q}_0]. \quad (83)$$

Коэффициенты системы зависят от времени и определяются фоновыми решениями \mathbf{X} .

3. Система $\mathbf{S}_{\rho\chi}$ двух линейных обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка относительно несингулярных функций $\rho_1(t)$ и $\chi_1(t)$ с начальными условиями

$$\mathbf{I}_{\rho\chi} = \left[\rho_1^0 = \frac{3}{2}M_0, \chi_1^0 = \frac{3}{2}Q_0, \dot{\rho}_1^0 = \frac{3}{2}\dot{M}_0, \dot{\chi}_1^0 = \frac{3}{2}\dot{Q}_0 \right]. \quad (84)$$

Коэффициенты системы зависят от времени, определяются фоновыми решениями \mathbf{X} и совпадают с коэффициентами системы \mathbf{S}_{MQ} . Правые части уравнений определяются решениями \mathbf{S}_{MQ} .

Таким образом, полученная замкнутая система девяти обыкновенных дифференциальных уравнений $\mathbf{SP} : \{\mathbf{S}_0 \cup \mathbf{S}_{MQ} \cup \mathbf{S}_{\rho\chi}\}$ с начальными условиями (82)–(84) является замкнутой моделью эволюции сферически-симметричных скалярно-гравитационных возмущений, локализованных внутри сферы $\Sigma(r_0)$ в случае начальных условий для возмущений вида кубического полинома. Как мы отмечали в разд. 3.2, именно уравнения эволюции сингулярных массы $M(t)$ и заряда $Q(t)$,

определяемые подсистемой обыкновенных дифференциальных уравнений (50), (51), являются независимой в общей системе уравнений на возмущения $\{\mathbf{S}_{MQ} \cup \mathbf{S}_{\rho\chi}\}$. На этот факт указывают как начальные условия (83), (84), так и неоднородные уравнения относительно несингулярной части возмущений (75), (76), правые части которых определяются явными функциями $M(t)$ и $Q(t)$.

4.2. Эволюция $M(t)$ и $Q(t)$

Хотя подсистема уравнений $\{\mathbf{S}_{MQ}\}$ не зависима от подсистемы уравнений $\mathbf{S}_{\rho\chi}$, она остается зависимой от фоновой подсистемы \mathbf{S}_0 . Поэтому можно получить лишь численные решения уравнений эволюции $M(t)$ и $Q(t)$. Исключение составляют лишь точные инфляционные решения фоновой системы, соответствующие ее особым точкам, полученные в [14]. Но именно эти решения показывают сильную неустойчивость скалярного поля при сохранении устойчивости гравитационного, что является следствием независимости в линейном приближении возмущений ТЭИ скалярного поля (34)–(36) от его возмущений в особых точках фоновой системы. Поэтому нам необходимо искать решения этих уравнений в неособых точках фоновой космологической системы, что можно осуществить лишь численными методами.

Итак, для решения главной проблемы — эволюции массы и заряда черной дыры сформируем общую систему семи дифференциальных уравнений фона \mathbf{S}_0 и эволюционных уравнений $M(t)$ с первым интегралом (19) и $Q(t)$ с начальными условиями $\{(82), (83)\}$.

Заметим для дальнейшего, что вследствие масштабной инвариантности метрики и скалярного потенциала, формул для возмущений этих величин (45), а также формул масштабного преобразования (29), (30) выполняется закон преобразования $M(t)$ и $Q(t)$ при масштабных преобразованиях модели $\mathcal{S}_\ell(\mathbf{S}_5)$ с коэффициентом подобия ℓ :

$$M = \ell^{-1}\tilde{M}, \quad Q = \ell^{-1}\tilde{Q}, \quad t = \ell^{-1}\tilde{t}. \quad (85)$$

Поэтому в моделях $\mathbf{S}_{SU(5)}$ и \mathbf{S}_{SM} величины $M(t)$ и $Q(t)$ будут больше этих величин базовой модели \mathbf{S}_{Pl} в 10^4 и 10^{15} раз соответственно, но при этом будут достигать таких значений за времена, большие времен базовой модели в 10^4 и 10^{15} раз соответственно. Однако необходимо учитывать тот факт, что при этом начальное значение массы M_0 также должно быть преобразовано по этим формулам, т. е. должно

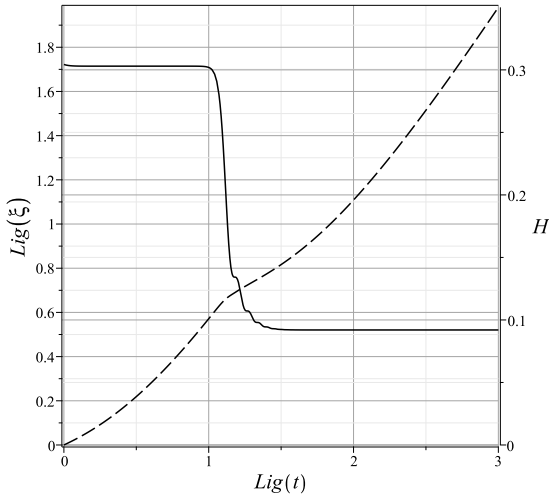


Рис. 1. Эволюция геометрических факторов $\xi(t)$ (штриховая линия) и $H(t)$ (сплошная линия)

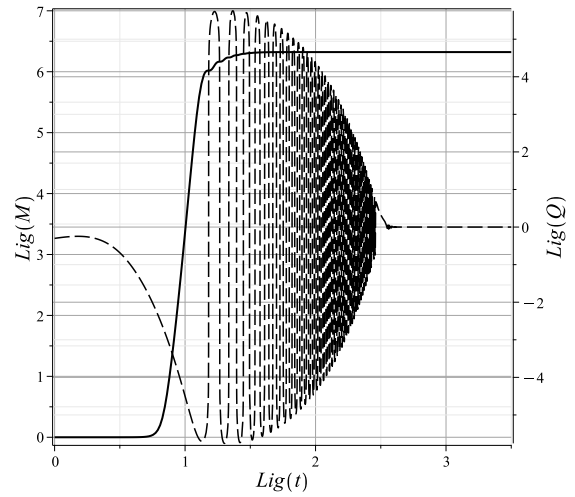


Рис. 3. Эволюция $M(t)$ (сплошная линия) и $Q(t)$ (штриховая линия) в модели $P_0(0.1)$ при $M_0 = 0, Q_0 = -1, I_0(10^{-3})$

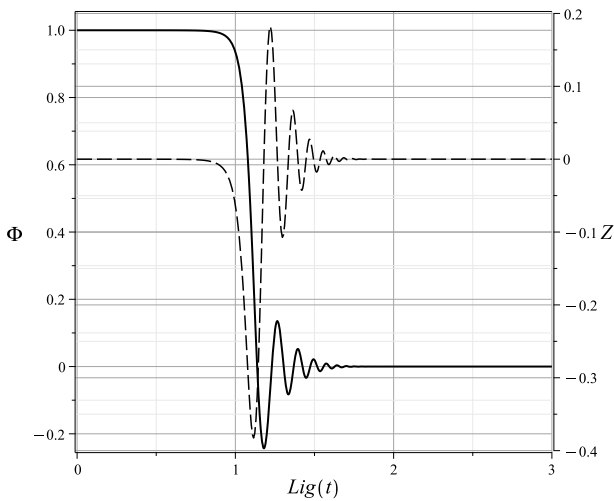


Рис. 2. Эволюция потенциала $\Phi(t)$ (сплошная линия) и его производной $Z(t)$ (штриховая линия)

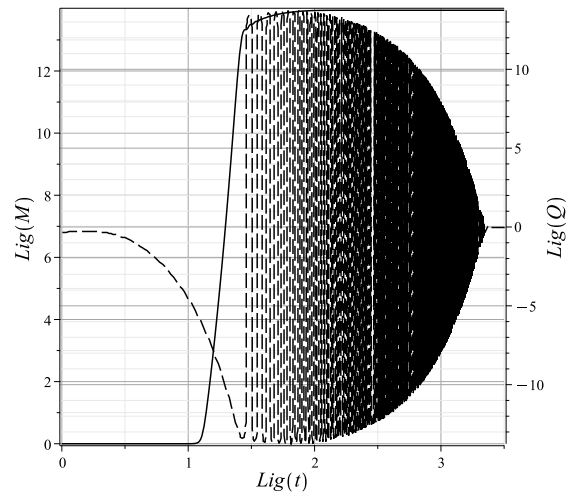


Рис. 4. Эволюция массы $M(t)$ (сплошная линия) и скалярного заряда $Q(t)$ (штриховая линия) в модели S_{PI} при $M_0 = 0, Q_0 = -1, I_0(10^{-9})$

быть увеличено в ℓ^{-1} раз. Поэтому в подобных моделях сохраняется кратность роста массы и заряда.

Учитывая это замечание, в дальнейшем мы будем рассматривать только базовую модель S_{PI} с вариацией лишь g и Λ_0 .

Для адекватного отображения графиков с большим разбросом масштабов знакопеременных функций в дальнейшем используется масштабирующая взаимно-однозначная функция $Lig(z)$ [27]:

$$Lig(z) = \text{sgn}(z) \lg(1 + |z|),$$

$$Lig^{-1}(z) = \text{sgn}(z)(10^{|z|} - 1),$$

так что

$$Lig(z)|_{|z| \rightarrow 0} \simeq z, \quad Lig(z)|_{|z| \rightarrow \infty} \simeq \text{sgn}(z) \lg(|z|).$$

Ниже мы будем рассматривать модели с планковскими параметрами, оставляя свободными величины скалярного заряда частиц g и затравочной космологической постоянной Λ_0 , при этом в начальных условиях сохраним в качестве свободного параметра значение ε_0 (см. (83)):

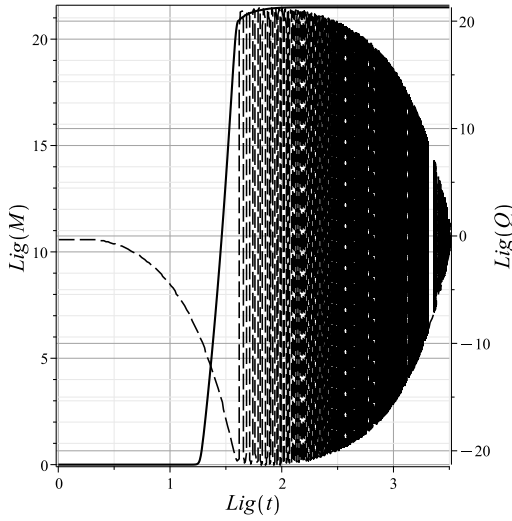


Рис. 5. Эволюция $M(t)$ (сплошная линия) и $Q(t)$ (штриховая линия) в модели $P_0(10^{-3})$ при $I_0(10^{-9})$

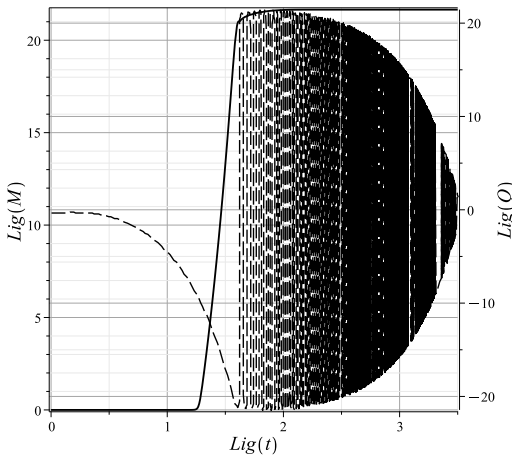


Рис. 6. Эволюция $M(t)$ (сплошная линия) и $Q(t)$ (штриховая линия) в модели $P_0(10^{-5}, 0.2527)$ при $I_0(10^{-9})$

$$P_0(g, \Lambda_0) = [1, 1, g, \Lambda_0], \tag{86}$$

$$I_0(\varepsilon_0) = [1, 0, \varepsilon_0, 1], [0, -1, 0, 1]. \tag{87}$$

Заметим, что всюду ниже в качестве начальных условий для сингулярной массы заданы нулевые начальные условия $M(0) = 0, \dot{M}(0) = 0$. Этим мы демонстрируем, во-первых, факт генерации массы скалярным зарядом и, во-вторых, отсутствие начальной сингулярной массы. Как показывают результаты численного интегрирования, замена начальных условий в (87) для начальных значений сингулярной массы и заряда $[0, 0, -1, 1] \rightarrow [1, 1, 0, 0]$ фактически ничего не изменяет, поэтому соответствующие случаи мы для краткости опускаем.

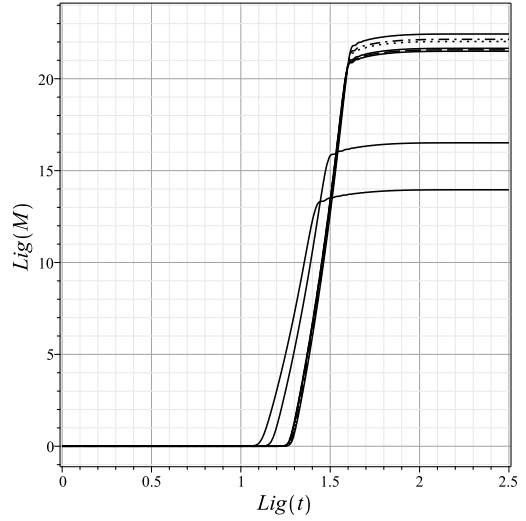


Рис. 7. Влияние заряда g на эволюцию $M(t)$ в модели $P_0(g)$. Сплошные линии снизу вверх: $g = 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-5}$; штриховая линия — $g = 10^{-6}$; штрихпунктирная — $g = 10^{-7}$; пунктирная — $g = 10^{-8}$

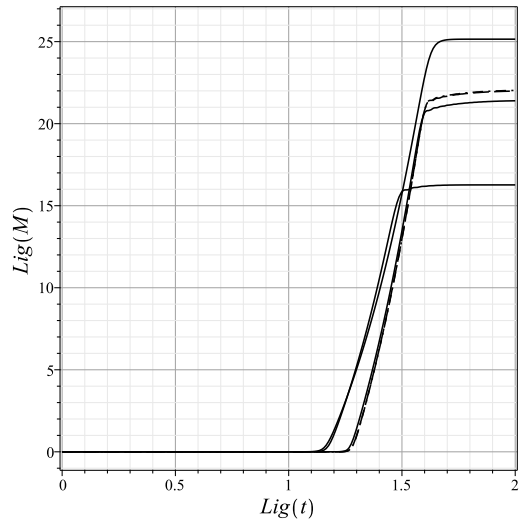


Рис. 8. Влияние начальной плотности жидкости на эволюцию $M(t)$ в модели $P_0(10^{-5}, 0.2527)$. Снизу вверх: $\varepsilon_0 = 10^{-3}; 10^{-5}; 10^{-9}; 10^{-7}; 10^{-1}$. Линии с 10^{-5} и 10^{-7} совпадают

На рис. 1 представлены графики эволюции фоновых функций $\xi(t), H(t)$, а на рис. 2 — эволюции $\Phi(t), Z(t)$ для базовой модели S_{Pl} с фундаментальными параметрами $P_0(0.1, 0.2527)$ и начальными условиями $I_0(0.001)$.

На рис. 2 показан переход модели из неустойчивого состояния с $\Phi_0 = 1$ в устойчивое с $\Phi = 0$. При этом параметр Хаббла H переходит из неустойчивого состояния с $H_1 = 0.303$ в устойчивое с $H_2 \approx 0.092$.

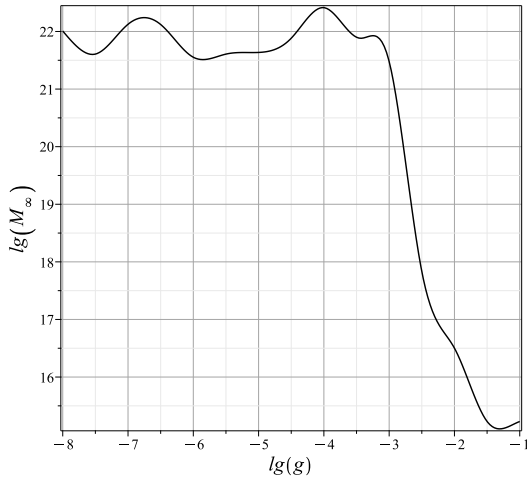


Рис. 9. Влияние скалярного заряда на конечную массу M_∞ в модели $P_0(g, 0.2527)$ с начальными условиями $I_0(10^{-9})$

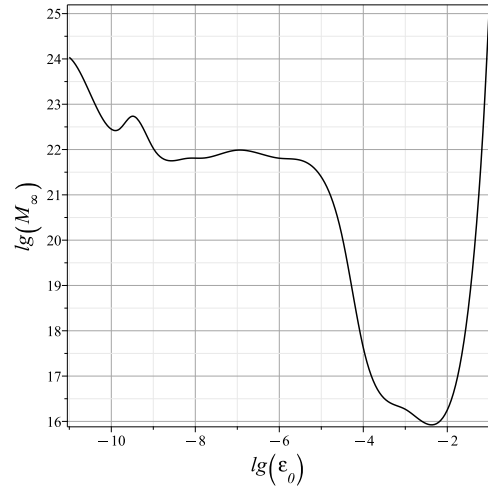


Рис. 10. Влияние начальной плотности ϵ_0 на конечную массу M_∞ в модели $P_0(10^{-5}, 0.2527)$

На рис. 3 показана эволюция сингулярных массы и заряда для этой же модели при начальных значениях массы и заряда $M_0 = 0, Q_0 = -1$. На графиках рис. 3 видно, что масса сингулярного источника начинает расти в момент времени $t_1 \approx 5.3$ и достигает постоянного значения в момент времени $t_2 \approx 19$, вырастая за время $\Delta t \approx 43.8$ в $2 \cdot 10^6$ раз. Из сравнения этого рисунка с предыдущими можно сделать вывод, что рост массы происходит как раз на этапе перехода космологической модели из состояния неустойчивой инфляции с $H_1 \approx 0.303$ в состояние с устойчивой инфляцией с $H_2 \approx 0.092 < H_1$.

График $M(t)$ на рис. 3, кроме всего прочего, показывает, что скалярное поле само способно сгенерировать массу за счет линейного взаимодействия в неособых точках динамической системы. Этому взаимодействию соответствуют члены $\dot{\phi}\dot{\Phi}$ и $\nu\dot{\Phi}^2$ в компонентах ТЭИ δT_α^α (34) и δT_4^4 (35), которые обращаются в нуль в особых точках.

Графики на рис. 4 показывают влияние начальной плотности жидкости на генерацию сингулярных массы и заряда. При прочих равных параметрах модели масса M вырастает в $3 \cdot 10^{13}$ раз, т. е. почти на 6 порядков больше, чем в предыдущем случае.

Влияние заряда g и плотности ϵ_0 на эволюцию массы

На рис. 5–7 показаны графики эволюции сингулярной массы $M(t)$ и заряда $Q(t)$ в зависимости от скалярного заряда частиц g .

На рис. 8 показано влияние начальной плотности заряженной жидкости ϵ_0 на эволюцию сингулярной массы $M(t)$.

Влияние заряда g и плотности на конечную массу M_∞

На рис. 9 и 10 показаны графики зависимости конечной сингулярной массы M_∞ от скалярного заряда частиц g и начальной плотности заряженной жидкости ϵ_0 .

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

5.1. Теоретические результаты

Сформулируем сначала основные теоретические результаты статьи.

1. С помощью метода разделения сферически-симметричных возмущений на сингулярные и несингулярные части [11] система уравнений относительно скалярно-гравитационных возмущений разложена на две линейные подсистемы, одна из которых состоит из двух обыкновенных дифференциальных уравнений и описывает эволюцию сингулярных центральных массы и заряда, а вторая состоит из двух уравнений в частных производных относительно двух несингулярных функций.

2. С помощью метода локализованных сферических возмущений [11] сформулирована задача с начальными и граничными условиями для скалярно-гравитационных возмущений, которая в случае возмущений, представимых в виде полиномов по радиальной переменной, сведена к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями.

3. Показано, что начальные и граничные условия (55) приводят к подчиненности решений для несингулярных частей возмущений $\rho(r, t)$ и $\chi(r, t)$ реше-

ниям для сингулярных частей возмущений, описываемых функциями $M(t)$ и $Q(t)$ (см. (84)).

4. В случае полинома третьей степени по радиальной переменной задача сведена к решению эволюционных уравнений относительно сингулярных массы и заряда. Показано, что радиус локализации возмущений остается сопутствующим в космологической модели, т.е. растет пропорционально масштабному фактору.

5.2. Динамика процесса образования черной дыры

Для обеспечения эффективного процесса развития экспоненциальной неустойчивости необходимо наличие весьма небольшого количества скалярно заряженной жидкости. В стандартной космологической модели эту жидкость можно получить на масштабах модели $SU(5)$, которая обеспечивает хиггсово поле кварками с цветными зарядами (скалярные заряды) и глюонами (скалярное поле). Кратко опишем возможный процесс образования черной дыры в результате скалярно-гравитационной неустойчивости.

1. Экспоненциально быстрый рост плоских скалярных возмущений до нелинейной фазы. При этом в первую очередь вырастают длинноволновые возмущения [28]. Изотропный характер возмущений при наличии локальных неоднородностей приводит к быстрому преобразованию плоских возмущений в локализованные сферически-симметричные, в которых в результате выживают длинноволновые.

2. После завершения процесса сферической локализации во время перехода от неустойчивой фазы расширения Вселенную к устойчивой в локализованных возмущениях развивается процесс экспоненциальной скалярно-гравитационной неустойчивости, приводящий к экспоненциально быстрому росту центральной массы за счет перераспределения энергии внутри области локализации и колебаниям хиггсова поля с комптоновским периодом $\tau = 2\pi/m$.

3. По завершении процесса перехода модели на устойчивую инфляцию сингулярный скалярный заряд обращается в нуль, а сингулярная масса фиксируется на значении M_∞ .

4. Область локализации возмущений фактически становится областью влияния сформированной черной дыры на внешний мир. Радиус области расширяется по закону $R = a(t)R_0/a(0)$, где R_0 — первоначальный радиус локализации, фактически длина волны неустойчивой моды возмущений, выжившей

в конкурентной борьбе при переходе на нелинейную стадию.

5. Поскольку для образования черной дыры не требуется радиационно доминированная плазма, а только некоторая весьма малая плотность кварк-глюонной, может, и холодной, плазмы, становится возможным образование реликтового излучения и после завершения образования черных дыр. Заметим, что наблюдательные данные (см. обзор [10]) свидетельствуют в пользу того, что масса SMBH сравнима с массой квазаров и галактик, которые и надо в этом случае интерпретировать как области локализации возмущений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Подводя итоги статьи, отметим, во-первых, что мы показали возможность экспоненциально быстрого роста сингулярной массы, отсутствующего в особых точках космологической модели [12–14]. Таким образом, первый путь выхода из тупиковой ситуации отсутствия гравитационной неустойчивости в особых точках путем распространения исследования на неособые точки космологических систем (см. Введение), предложенный в [14], оказался верным.

Во-вторых, приведенные результаты показывают возможность экспоненциально быстрого роста сингулярной массы в базовой модели с планковскими масштабами на 25 порядков за время порядка $100 t_{Pl}$. Таким образом, для достижения критического значения массы SSBH $10^{42} m_{Pl}$ (1) достаточно иметь начальную массу первичной черной дыры $10^{17} m_{Pl} \approx 10^{12} \Gamma$ на планковских временах. Переход к масштабам теоретико-полевых моделей $S_{SU(5)}$ и S_{SM} проводится по формулам (85). При этом, как мы отмечали, одновременно с ростом M_∞ происходит и аналогичный рост начальной массы M_0 . Поэтому при переходе к модели $SU(5)$ мы получим рост массы на 4–5 порядков, но при этом во столько же раз должна увеличиться и начальная масса (либо заряд). Таким образом,

- 1) если процесс рождения SSBH происходит на планковских стадиях, для достижения значения массы (1) необходима начальная масса (или заряд) $10^{17} m_{Pl}$ и время завершения процесса $t_\infty \sim 10^2 t_{Pl}$;
- 2) на стадии с масштабами модели $SU(5)$ должно быть $M_0 \sim 10^{21} m_{Pl}$ и время $t_\infty \sim 10^6 t_{Pl}$;
- 3) на стадии с масштабами модели SM должно быть $M_0 \sim 10^{32} m_{Pl}$ и время $t_\infty \sim 10^{19} t_{Pl}$.

Заметим, однако, что даже последние значения в привычных нам единицах измерения дают $M_0 \sim 10^{-5} M_\odot$ и $t_\infty \sim 10^{-24}$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Q. Zhu, Y. Li, Y. Li et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **514**, 5583 (2022).
2. L. A. Ureña-López and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **66**, 083005 (2002).
3. S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott, *Astrophys. J.* **692**, 1075 (2009).
4. S. Doeleman, J. Weintroub, A. E. E. Rogers et al., *Nature* **455**, 78 (2008).
5. X. Fan, A. Barth, E. Banados, and G. D. Rosa, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **61**, 373 (2023).
6. R. L. Larson, S. L. Finkelstein, D. D. Kocevski et al., *Astrophys. J. Lett.* **953**, L29 (2023).
7. X. Fan, A. Barth, E. Banados et al., *Bull. AAS* **51**(3), 121 (2019).
8. F. Wang, J. Yang, X. Fan et al., *Astrophys. J. Lett.* **907**, L1 (2021).
9. P. Tisserand and R. L. Webster, *Nat. Astron.* **8**, 520 (2024).
10. O. K. Silchenko, *Phys.–Usp.* **19**, 188 (2025) [O. K. Сильченко, *УФН* **19**, 188 (2025)].
11. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **215**, 862 (2023).
12. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **222**, 285 (2025).
13. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **223**, 127 (2025).
14. Yu. G. Ignat'ev, *JETP* **168**, 631 (2025) [Ю. Г. Игнат'ев, *ЖЭТФ* **168**, 631 (2025)].
15. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **226**(2) (2026) [Ю. Г. Игнат'ев, *ТМФ* **226**(2) (2026)].
16. Yu. G. Ignat'ev and D. Yu. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **209**, 1437 (2021).
17. Yu. G. Ignat'ev and I. A. Kokh, *Theor. Math. Phys.* **207**, 514 (2021).
18. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **219**, 688 (2024).
19. S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford Univ. Press, Oxford (2008).
20. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt (1971) [Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1971)].
21. Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **16**, 587 (1946) [Е. М. Lifshitz, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **16**, 587 (1946)].
22. Yu. G. Ignat'ev and N. Elmakhi, *Russ. Phys. J.* **51**(1), 74 (2008) [Ю. Г. Игнат'ев, Н. Эльмахи, *Изв. вузов. Физика*, **41**(1), 66 (2008)].
23. J. L. Sing, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam (1960).
24. Yu. G. Ignat'ev, *Gravit. Cosmol.* **25**, 354 (2019).
25. Yu. G. Ignat'ev and A. A. Popov, *Phys. Lett. A* **220**, 22 (1996).
26. V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow (1967) [В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1967)].
27. Yu. Ignat'ev, A. Agathonov, M. Mikhailov, and D. Ignatyev, *Astrophys. Space Sci.* **357**, 61 (2015).
28. Yu. G. Ignat'ev, *Gravit. Cosmol.* **29**(4), 327 (2023).

Formation Of Supermassive Black Holes in the Early Universe by the Mechanism of Scalar-Gravitational Instability

Yu. G. Ignat'ev

Institute of Physics, Kazan Federal University, 420008, Kazan, Russia

Abstract

A mathematical model for the development of localized spherical perturbations in the cosmological medium of a scalar-charged fluid with a Higgs scalar field is investigated. The possibility of anomalously rapid growth of the singular mass (10^{25} -multiple) over times on the order of several hundred Planck times during the transition of the cosmological model from an unstable to a stable state is demonstrated. After the transition, the central mass is fixed, and the central scalar charge vanishes. The localization radius is co-moving in the Friedmann universe. The features of the black hole formation process are also investigated, and the fundamental possibility of the formation of supermassive black holes in the early Universe via the scalar-gravitational instability mechanism is demonstrated.

Keywords: scalar-charged fluid, cosmological model, scalar field with self-interaction, gravitational stability, longitudinal perturbations, supermassive black holes.