

# УЛЬТРАСЛОЖНЫЕ ДИАГРАММЫ ПРОВОДИМОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЧТИ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

А. Я. Мальцев\*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 29 января 2026 г.,  
после переработки 29 января 2026 г.  
Принята к публикации 18 февраля 2026 г.

Исследуется возможность возникновения ультрасложных угловых диаграмм проводимости в приближении почти свободных электронов для металлов кубической симметрии. Как показывают оценки, появление таких диаграмм требует попадания уровня Ферми в очень узкие интервалы энергий внутри разрешенной зоны. С нашей точки зрения, данное обстоятельство связано с высокой симметрией, а также с наиболее простой аналитической формой рассматриваемых дисперсионных соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$ .

**Ключевые слова:** сложные поверхности Ферми, гальваномагнитные явления

DOI: 10.7868/S3034641X26030077

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются угловые диаграммы, определяющие проводимость нормальных металлов в сильных магнитных полях. Сразу отметим, что нас будут интересовать лишь металлы с достаточно сложными поверхностями Ферми, простирающимися во всех направлениях в  $\mathbf{p}$ -пространстве (рис. 1).

Как хорошо известно (см., например, [1–4]), квазиимпульс электрона определен с точностью до векторов обратной решетки  $L^*$ :

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p} + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z},$$

при этом базис решетки  $L^*$  задается векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3}{\mathbf{l}_1 \cdot [\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3]}, \\ \mathbf{a}_2 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1}{\mathbf{l}_1 \cdot [\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3]}, \\ \mathbf{a}_3 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1 \cdot [\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3]}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$  — векторы базиса прямой кристаллической решетки  $L$ .

\* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

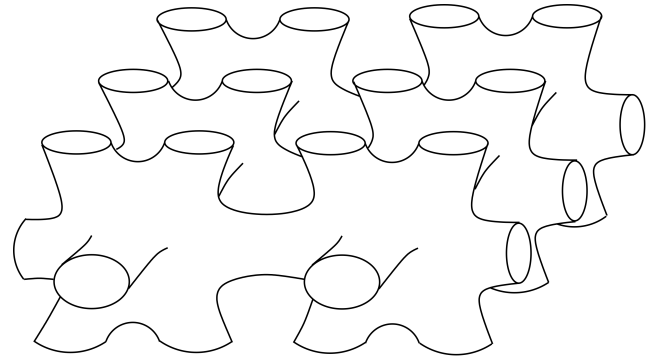


Рис. 1. Сложная поверхность Ферми в  $\mathbf{p}$ -пространстве

Как следствие этого, дисперсионное соотношение (зависимость энергии от квазиимпульса)  $\epsilon(\mathbf{p})$  в кристалле может рассматриваться либо как 3-периодическая функция в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , либо просто как гладкая функция на трехмерном торе

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / L^*,$$

определяемом факторизацией  $\mathbf{p}$ -пространства по векторам обратной решетки.

Поверхность Ферми металла

$$S_F : \quad \epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$$

можно также рассматривать либо как 3-периодическую поверхность в  $\mathbf{p}$ -пространстве (рис. 1), ли-

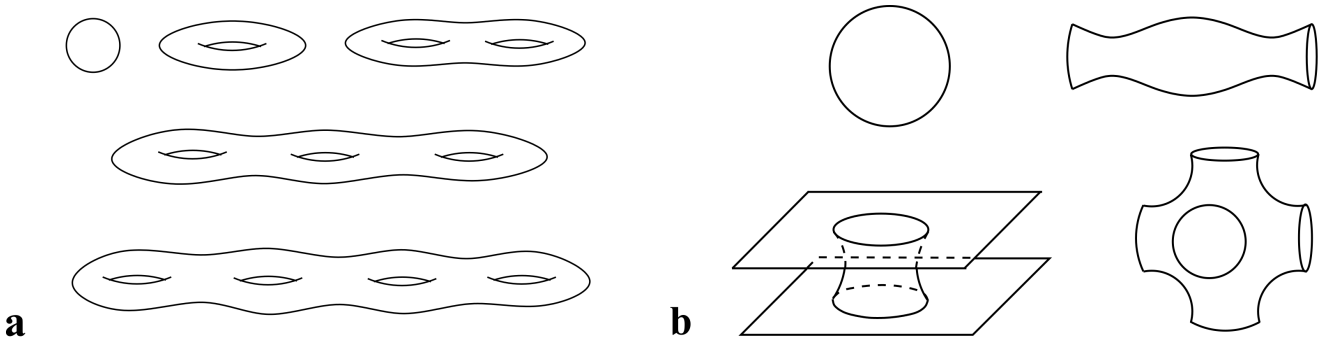


Рис. 2. *a* — Абстрактные ориентируемые поверхности рода  $g = 0, 1, 2, 3, 4$ . *b* — Примеры поверхностей Ферми ранга 0, 1, 2, 3

бо как гладкую компактную поверхность, вложенную в  $\mathbb{T}^3$ . Отметим здесь, что при рассмотрении электронных явлений в сильных магнитных полях оба эти представления играют весьма важную роль.

Каждая компактная (ориентируемая) поверхность  $S_F$  имеет топологический род  $g$ , который может принимать значения  $g = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  (рис. 2 *a*).

Вложение  $S_F \subset \mathbb{R}^3$  (а также  $S_F \subset \mathbb{T}^3$ ) обладает также топологическим рангом  $S_F$ . По определению, топологический ранг  $S_F$  равен количеству независимых направлений в  $\mathbb{R}^3$ , в которых простирается поверхность  $S_F$  (рис. 2 *b*). Нетрудно видеть, что ранг поверхности Ферми может принимать значения 0, 1, 2 и 3.

По топологическим причинам, ранг поверхности Ферми не может превосходить ее рода. Таким образом, достаточно сложные с нашей точки зрения поверхности Ферми имеют ранг  $S_F = 3$  и  $g \geq 3$ .

Приложение внешнего магнитного поля вызывает адиабатическую эволюцию электронных состояний в кристалле, которая описывается изменением квазиимпульса, определяемым системой

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \equiv \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \quad (2)$$

Геометрически траектории системы (2) задаются пересечениями поверхностей постоянной энергии

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$$

и плоскостей, ортогональных  $\mathbf{B}$ . Электронные явления в металлах определяются при этом траекториями (2), лежащими на поверхности Ферми  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ . Как можно видеть, для сложных поверхностей Ферми форма траекторий (2) может сильно зависеть от направления  $\mathbf{B}$  (рис. 3 *a*).

В пределе большой длины свободного пробега и сильных магнитных полей электронные транспортные явления в кристалле во многом определяются геометрией траекторий системы (2) в  $\mathbf{p}$ -пространстве. В частности, поведение тензора проводимости  $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$  существенно зависит от наличия или отсутствия открытых (незамкнутых) траекторий системы (2) на поверхности Ферми [5–8]. Соответствующий предел может быть формально записан в виде условия  $\omega_B \tau \gg 1$ , где  $\omega_B$  — циклотронная частота, а  $\tau$  — время свободного пробега электрона в кристалле.

Более точно, необходимо потребовать, чтобы электрон проходил достаточно большую часть траектории системы (2) (по сравнению с  $p_F$ ) между актами рассеяния. Надо сразу отметить, что этот предел относится к достаточно чистым монокристаллическим образцам при низких температурах ( $T \leq 1$  К) и сильным магнитным полям ( $B \geq 1$  Тл).

Ярким примером зависимости транспортных явлений от геометрии траекторий (2) является различие вкладов замкнутых и открытых периодических траекторий (рис. 3 *b, c*) в тензор проводимости в пределе  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$  [5]

$$\Delta \sigma_{\text{closed}}^{kl} \simeq \frac{ne^2 \tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B \tau)^{-2} & (\omega_B \tau)^{-1} & (\omega_B \tau)^{-1} \\ (\omega_B \tau)^{-1} & (\omega_B \tau)^{-2} & (\omega_B \tau)^{-1} \\ (\omega_B \tau)^{-1} & (\omega_B \tau)^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\Delta \sigma_{\text{periodic}}^{kl} \simeq \frac{ne^2 \tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B \tau)^{-2} & (\omega_B \tau)^{-1} & (\omega_B \tau)^{-1} \\ (\omega_B \tau)^{-1} & * & * \\ (\omega_B \tau)^{-1} & * & * \end{pmatrix} \quad (4)$$

Можно видеть, что вклад замкнутых траекторий в тензор  $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$  аналогичен вкладу газа свободных

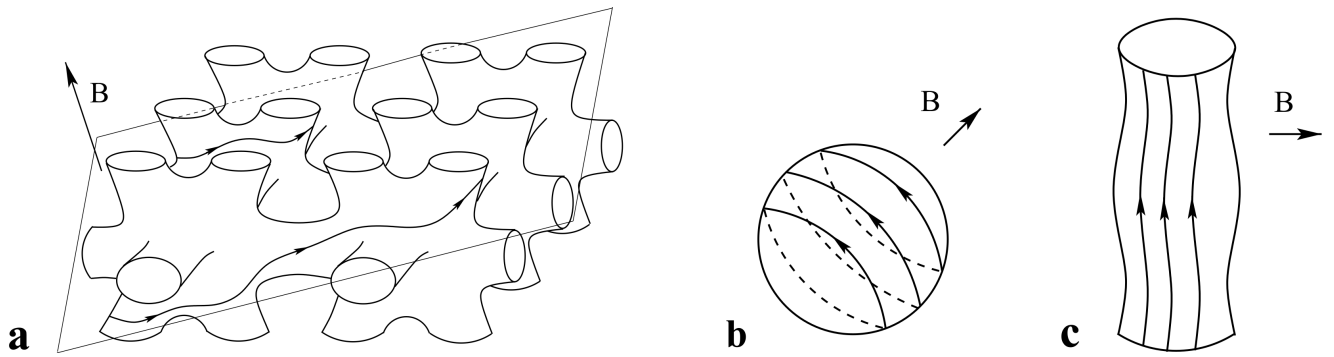


Рис. 3. *a* — Траектории системы (2) на поверхности Ферми достаточно сложной формы. *b* — Замкнутые траектории системы (2). *c* — Открытые периодические траектории системы (2)

электронов, в то время как вклад (4) обладает резкой анизотропией в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ .

В формулах (3)–(4) величина  $n$  играет роль концентрации носителей заряда, а  $m^*$  — эффективной массы электрона в кристалле. Знак «\*» обозначает здесь безразмерные константы порядка 1.

Формулы (3)–(4) описывают асимптотическое поведение тензора  $\sigma^{kl}(B)$  в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ , в частности, каждый матричный элемент в них определен с точностью до постоянного множителя порядка 1. При этом, однако, можно сделать одно важное замечание.

А именно, если речь идет о вкладе всех замкнутых траекторий, покрывающих поверхность Ферми вида рис. 3 *b*, то для холловской проводимости можно привести более точное выражение. Так, в главном порядке по  $1/B$  величина  $\sigma^{xy}(B)$  имеет вид [1–4, 8]

$$\sigma^{xy} = -\sigma^{yx} = \pm \frac{ec}{B} \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (5)$$

где  $V$  — объем, ограниченный поверхностью  $S_F$  в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

Как можно видеть, величина (5) здесь не зависит от направления магнитного поля при заданной величине  $B$ . Знаки «+» и «-» в формуле (5) отвечают поверхностям Ферми электронного и дырочного типа соответственно. Напомним, что для дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ , такого что

$$\epsilon_{\min} \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_{\max},$$

поверхности Ферми рис. 3 *b* электронного типа возникают при значениях  $\epsilon_F$ , близких к  $\epsilon_{\min}$ , а дырочного — при  $\epsilon_F$ , близких к  $\epsilon_{\max}$ .

Отметим также, что для поверхностей Ферми, содержащих открытые траектории системы (2), соотношение (5) не выполняется.

Задача описания всех возможных типов открытых траекторий системы (2) была поставлена Новиковым в работе [9] и затем интенсивно исследовалась в его топологической школе [10–17]. В результате исследований была получена полная классификация возможных траекторий системы (2) с произвольным законом  $\epsilon(\mathbf{p})$ , а также получено подробное описание их геометрических свойств. Кроме того, к настоящему времени получено также описание всех возможных режимов поведения проводимости в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ , отвечающих появлению открытых траекторий различных типов на поверхности Ферми (см., например, [18–20]).

Для металла с заданной поверхностью Ферми  $S_F$  естественно ввести «угловую диаграмму», определяемую системой (2). А именно, для каждого направления  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}/B \in \mathbb{S}^2,$$

угловая диаграмма указывает тип открытых траекторий (либо их отсутствие) на поверхности  $S_F$ . Поскольку каждый тип открытых траекторий на  $S_F$  связан с определенным типом поведения тензора  $\sigma^{kl}(B)$  при  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ , мы будем называть такие диаграммы диаграммами проводимости металла в сильных магнитных полях.

Как нетрудно видеть, для значений  $\epsilon_F$ , близких к  $\epsilon_{\min}$  или  $\epsilon_{\max}$ , угловые диаграммы проводимости являются очень простыми. А именно, все направления  $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$  отвечают здесь наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми (рис. 3 *b*). Холловская проводимость здесь задается формулами (5) и имеет электронный тип при  $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_{\min}$  и дырочный при  $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_{\max}$ .

Мы также будем относить к простым диаграммам, допускающие возникновение лишь периодиче-

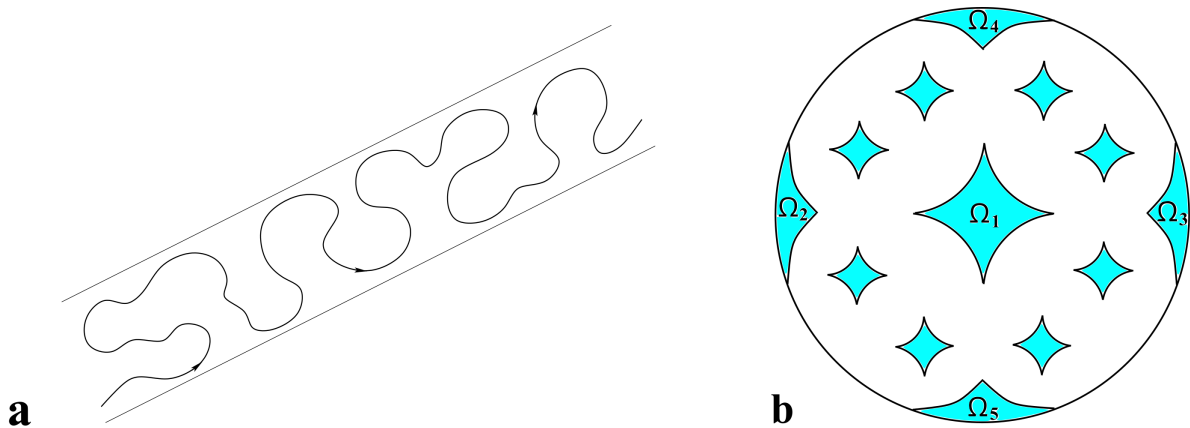


Рис. 4. *a* — Устойчивая открытая траектория системы (2) в плоскости, ортогональной **V**. *b* — Зоны устойчивости на угловой диаграмме проводимости, отвечающие различным целочисленным плоскостям  $\Gamma_\alpha$  (схематично)

ских открытых траекторий (2) на поверхности Ферми. Как правило, такие диаграммы возникают также для значений  $\epsilon_F$ , не слишком удаленных от  $\epsilon_{\min}$  или  $\epsilon_{\max}$ .

Основным типом открытых траекторий (2) являются устойчивые открытые траектории, т.е. траектории, устойчивые по отношению ко всем малым вращениям **V**, а также малым вариациям значения  $\epsilon_F$ .

Устойчивые открытые траектории системы (2) обладают замечательными геометрическими свойствами [10, 11, 13]. А именно:

1) Каждая устойчивая открытая траектория системы (2) лежит (в плоскости, ортогональной **V**) в прямой полосе конечной ширины, проходя ее насквозь (рис. 4 *a*).

2) Среднее направление устойчивых открытых траекторий (во всех плоскостях, ортогональных **V**) при заданном направлении **V** задается пересечением плоскости, ортогональной **V**, и некоторой (целочисленной) плоскости  $\Gamma$ , порожденной двумя векторами обратной решетки.

3) Плоскость  $\Gamma$  неизменна при малых вращениях **V** и вариациях значения  $\epsilon_F$ .

Отметим, что в общем случае устойчивые открытые траектории не являются периодическими.

Появление устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми отвечает областям  $\Omega_\alpha$  (зонам устойчивости) на угловой диаграмме, каждая из которых отвечает своей целочисленной плоскости  $\Gamma_\alpha$  (рис. 4 *b*). Зоны  $\Omega_\alpha$ , а также целочисленные плоскости  $\Gamma_\alpha$  являются наблюдаемыми экспериментально, что явилось основой для введения топологиче-

ских чисел в проводимости нормальных металлов в работе [21].

Устойчивые открытые траектории могут появляться лишь на достаточно сложных поверхностях Ферми (ранга 2 или 3). Мы будем относить угловую диаграмму к достаточно сложным, если она содержит зоны устойчивости  $\Omega_\alpha$ .

Для фиксированного дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  сложные угловые диаграммы возникают в некотором фиксированном интервале энергий

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_2^A), \quad \epsilon_{\min} \leq \epsilon_1^A < \epsilon_2^A \leq \epsilon_{\max},$$

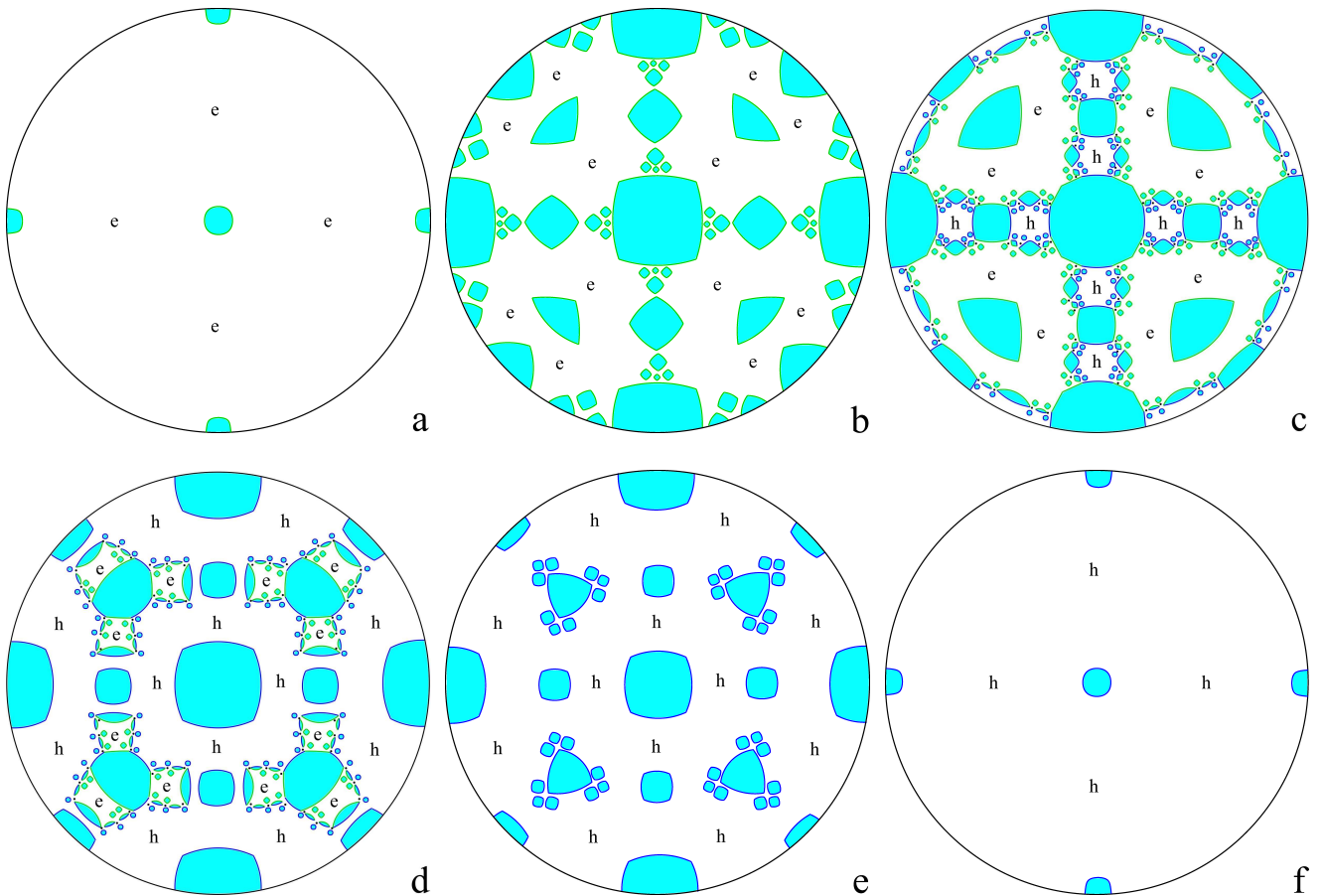
где поверхности Ферми являются достаточно сложными.

Интервал  $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$  может быть при этом разделен на три интервала:

$$(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A) = (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B) \cup [\epsilon_1^B, \epsilon_2^B] \cup (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$$

(для дисперсионных законов общего положения), отвечающих различной структуре угловых диаграмм (см. [22, 23]). Данное обстоятельство связано в том числе с различным поведением холловской проводимости при различных значениях  $\epsilon_F$ .

А именно, рассматривая эволюцию угловых диаграмм при  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$  от появления первых зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  до их исчезновения (рис. 5), можно видеть, что все диаграммы содержат большие области, отвечающие наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Эти области занимают почти всю единичную сферу при  $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_1^A$  или  $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_2^A$  (рис. 5 *a, f*), при этом в первом случае они отвечают электронной холловской проводимости, а во втором — дырочной.



**Рис. 5.** Эволюция зон устойчивости на угловой диаграмме проводимости в интервале  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$  (схематично). Знаками «e» и «h» помечены области электронной и дырочной холловской проводимости соответственно

В действительности, формулы (5) можно применять и для сложных поверхностей Ферми, при условии, что они содержат лишь замкнутые траектории системы (2) и это свойство сохраняется при (любых) малых вращениях  $\mathbf{B}$ . В этом случае формулы (5) приобретают вид

$$\sigma^{xy} = -\sigma^{yx} = \pm \frac{ec}{B} \frac{2V_{\mp}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (6)$$

где  $V_-$  — объем области  $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ , а  $V_+$  — объем области  $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$  в торе  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*$ .

Для выбора величины  $V_-$  или  $V_+$  в формуле (6) необходимо рассмотреть картину замкнутых траекторий (2) в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$ . А именно, в описываемой ситуации возможны два случая:

1) Ситуация  $A(-)$ :

Плоскость, ортогональная  $\mathbf{B}$ , содержит единственную неограниченную компоненту множества  $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ , все остальные компоненты множеств

$\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$  и  $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$  являются ограниченными (рис. 6 a).

2) Ситуация  $A(+)$ :

Плоскость, ортогональная  $\mathbf{B}$ , содержит единственную неограниченную компоненту множества  $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ , все остальные компоненты множеств  $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$  и  $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$  являются ограниченными (рис. 6 b).

При условии, что поверхность Ферми содержит лишь замкнутые траектории системы (2) и это свойство устойчиво по отношению к малым вращениям  $\mathbf{B}$ , все плоскости, ортогональные  $\mathbf{B}$ , имеют один и тот же тип ( $A(-)$  или  $A(+)$ ). В формуле (6) множитель  $V_-$  отвечает ситуации  $A(-)$ , а множитель  $V_+$  — ситуации  $A(+)$ .

Вблизи краев интервала  $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$  область

$$\mathbb{S}^2 \setminus \bigcup_{\alpha} \overline{\Omega_{\alpha}}$$

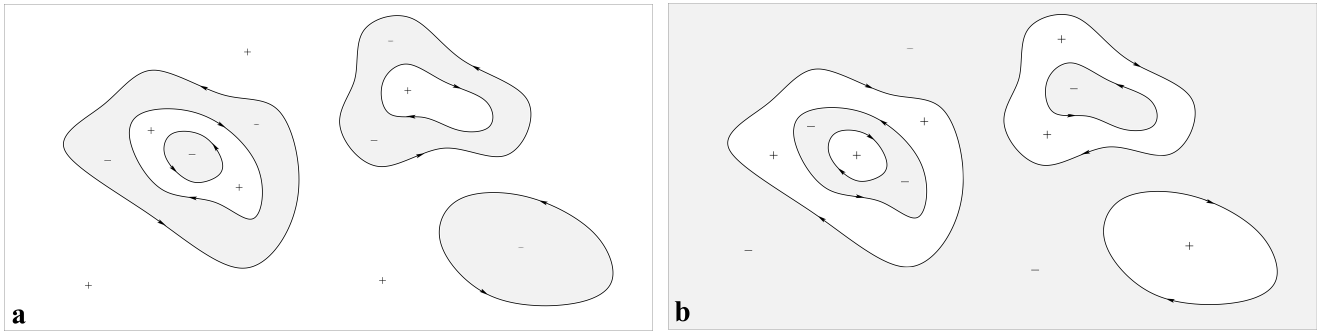


Рис. 6. Ситуации  $A(-)$  и  $A(+)$  в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$

на угловой диаграмме является связной, а количество зон  $\Omega_\alpha \subset \mathbb{S}^2$  — конечным (рис. 5a, b, e, f). Такой вид угловых диаграмм сохраняется в некоторых интервалах

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B), \quad \epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A),$$

где  $\epsilon_1^A < \epsilon_1^B \leq \epsilon_2^B < \epsilon_2^A$ .

Области наличия лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми, очевидно, отвечают электронной холловской проводимости

$$\sigma^{xy} = -\sigma^{yx} = \frac{ec}{B} \frac{2V_-}{(2\pi\hbar)^3}$$

в интервале  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и дырочной холловской проводимости

$$\sigma^{xy} = -\sigma^{yx} = -\frac{ec}{B} \frac{2V_+}{(2\pi\hbar)^3}$$

в интервале  $\epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$ .

Мы будем называть угловые диаграммы проводимости диаграммами типа  $A_-$  при  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и диаграммами типа  $A_+$  при  $\epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$ .

Интервал  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  разделяет диаграммы двух описанных выше типов ( $A_-$  и  $A_+$ ). Для дисперсионных соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$  общего положения интервал  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  имеет конечную ширину ( $\epsilon_2^B > \epsilon_1^B$ ).

Нас будет интересовать именно положение интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  для соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$ , возникающих в приближении почти свободных электронов.

При  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$  множество

$$\mathbb{S}^2 \setminus \bigcup_{\alpha} \overline{\Omega_\alpha}$$

содержит области как электронной, так и дырочной холловской проводимости (рис. 5 c, d). Области различной холловской проводимости разделены «цепочками» зон  $\Omega_\alpha$ , содержащими в случае общего положения бесконечное число зон. Мы будем называть

здесь угловые диаграммы этого типа ультрасложными диаграммами проводимости, или диаграммами типа В.

Диаграммы типа В общего положения содержат бесконечное число зон  $\Omega_\alpha$ . Мелкие зоны  $\Omega_\alpha$  отвечают все более сложной геометрии открытых траекторий системы (2) (рис. 7 a), что, в свою очередь, отвечает все более сложному поведению тензора  $\sigma^{kl}(B)$  в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ .

Точки накопления мелких зон  $\Omega_\alpha$  представляют особые направления  $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ , отвечающие появлению траекторий, называемых хаотическими. Самые распространенные хаотические траектории или траектории Дынникова [15, 16] имеют очень сложную форму, блуждая всюду в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$  (рис. 7 b). Траектории такого типа дают наиболее сложный вклад в тензор  $\sigma^{kl}(B)$ , приводящий к подавлению проводимости вдоль направления  $\mathbf{B}$ , а также появлению дробных степеней  $\omega_{BT}$  в компонентах  $\sigma^{kl}(B)$  [24, 25]. Надо отметить, что изучение хаотических траекторий системы (2) активно продолжается и в настоящее время (см. [26–43]).

Как показывают исследования, интервал  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  обычно является довольно узким и вероятность попадания в него  $\epsilon_F$  довольно низка. Это объясняет трудность обнаружения диаграмм типа В в реальных экспериментах. В работе [44] были представлены оценки положения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  и его ширина в приближении сильной связи. В настоящей работе мы приводим оценки положения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  в приближении почти свободных электронов (см. [1–4, 8, 45]) для кристаллов кубической симметрии. Представленные результаты могут быть полезны как для поиска ультрасложных диаграмм проводимости, так, возможно, и для их получения путем внешнего воздействия на образец.

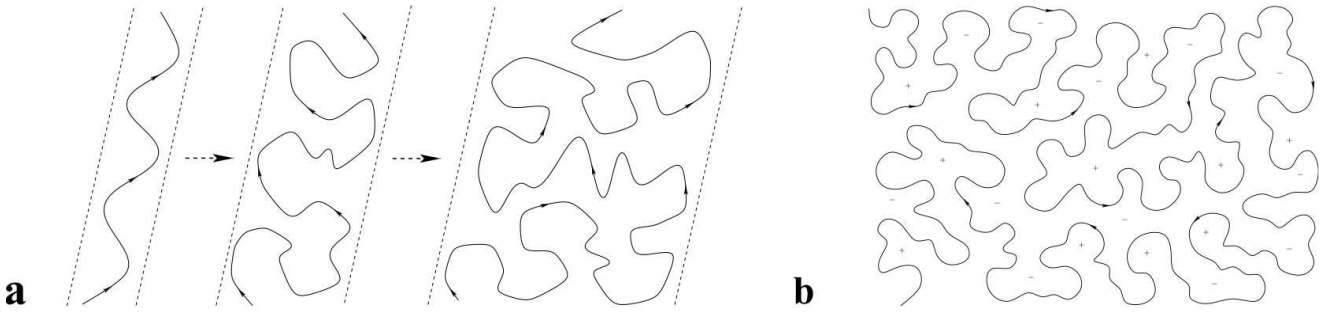


Рис. 7. *a* — Усложнение формы устойчивых открытых траекторий для мелких зон устойчивости  $\Omega_\alpha$ . *b* — Хаотическая траектория Дынникова в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$  (схематично)

## 2. УЛЬТРАСЛОЖНЫЕ УГЛОВЫЕ ДИАГРАММЫ И СЛУЧАЙ ПРОСТОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Для определения места ультрасложных угловых диаграмм удобно соотнести их с угловыми диаграммами всего дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Угловая диаграмма дисперсионного соотношения [17] указывает интервал  $[\epsilon_1(\mathbf{n}), \epsilon_2(\mathbf{n})]$  появления открытых траекторий системы (2), а также их тип для каждого направления  $\mathbf{V}$  при заданном  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Согласно [17]:

1) Для каждого направления  $\mathbf{n} = \mathbf{V}/V$  открытые траектории системы (2) возникают в замкнутом интервале

$$\epsilon_F \in [\epsilon_1(\mathbf{n}), \epsilon_2(\mathbf{n})],$$

который может стягиваться в точку

$$\epsilon_1(\mathbf{n}) = \epsilon_2(\mathbf{n}) = \epsilon_0(\mathbf{n}).$$

2) Случай  $\epsilon_2(\mathbf{n}) > \epsilon_1(\mathbf{n})$  отвечает появлению устойчивых либо периодических открытых траекторий (2).

Для направлений  $\mathbf{V}$  максимальной иррациональности случай (2) отвечает появлению устойчивых открытых траекторий (2), имеющих одно и то же среднее направление при всех  $\epsilon_F \in [\epsilon_1(\mathbf{n}), \epsilon_2(\mathbf{n})]$ . Функции  $\epsilon_1(\mathbf{n})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{n})$  непрерывны на множестве направлений  $\mathbf{V}$  максимальной иррациональности и могут быть продолжены до непрерывных функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$  на единичной сфере. Связные компоненты множества  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) > \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$  определяют зоны устойчивости  $W_\alpha$  на  $\mathbb{S}^2$ , отвечающие устойчивым открытым траекториям, связанным с различными целочисленными плоскостями  $\Gamma_\alpha$ . Зоны устойчивости  $W_\alpha$  представляют собой области с кусочно-гладкой границей на единичной сфере [17].

Зоны  $W_\alpha$  образуют всюду плотное множество на единичной сфере (рис. 8). Картина зон  $W_\alpha$  и поведение функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$ ,  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$  (а также  $\epsilon_1(\mathbf{n})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{n})$ ) дают важную информацию о соотношении  $\epsilon(\mathbf{p})$  в целом.

Зоны  $\Omega_\alpha$  (на угловой диаграмме проводимости) представляют подобласти зон  $W_\alpha$ , такие что

$$\mathbf{n} \in W_\alpha, \quad \epsilon_F \in [\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})]$$

(если это множество не пусто).

Как можно видеть, для значений  $\epsilon_1^A$  и  $\epsilon_2^A$  мы имеем соотношения

$$\epsilon_1^A = \min_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \quad \epsilon_2^A = \max_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}).$$

Для направлений  $\mathbf{V}$  максимальной иррациональности условие  $\epsilon_F < \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$  означает попадание в область наличия лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми (на угловой диаграмме проводимости) с холловской проводимостью электронного типа. Аналогично, условие  $\epsilon_F > \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$  для таких направлений  $\mathbf{V}$  означает попадание  $\mathbf{n}$  в область наличия лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми с холловской проводимостью дырочного типа.

Присутствие областей обоих типов на угловой диаграмме проводимости означает условие

$$\min_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) < \epsilon_F < \max_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}),$$

что приводит к соотношениям

$$\epsilon_1^B = \min_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}), \quad \epsilon_2^B = \max_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \quad (7)$$

определяющим интервал появления диаграмм проводимости типа B [22, 23].

Сразу отметим, что для физически реалистичных дисперсионных соотношений мы будем считать,

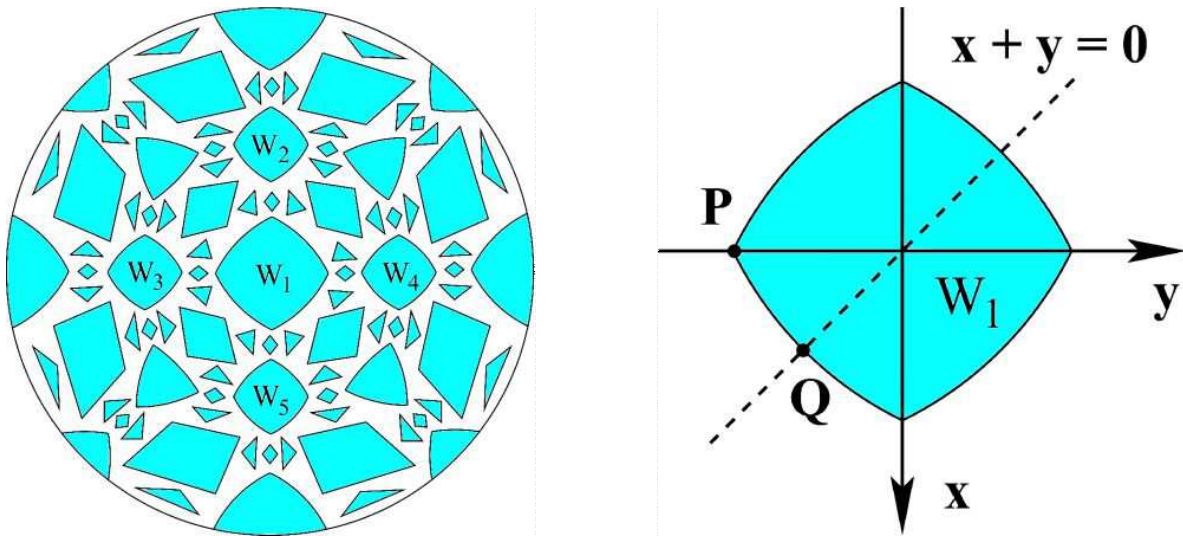


Рис. 8. Зоны устойчивости  $W_\alpha$  на угловой диаграмме для дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  и симметричные точки  $P$  и  $Q$  на границе зоны  $W_1$  (схематично)

что все зоны  $\Omega_\alpha$  и  $W_\alpha$  являются односвязными [23]. Это, в частности, подразумевает соотношения

$$\max_{W_\alpha} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) = \max_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \quad \min_{W_\alpha} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) = \min_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$$

для всех зон  $W_\alpha$  (и их границ  $\partial W_\alpha$ ). Соотношения (7) можно при этом заменить на соотношения

$$\epsilon_1^B = \min' \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}), \quad \epsilon_2^B = \max' \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \quad (8)$$

где минимум и максимум берутся лишь по множеству границ  $W_\alpha$  (а не по всей единичной сфере  $S^2$ ).

На границах  $W_\alpha$  мы имеем

$$\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) \equiv \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}),$$

и, таким образом, положение интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  определяется минимумом и максимумом функции  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  по всем границам  $W_\alpha$ :

$$\epsilon_1^B = \min_{\cup \partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}), \quad \epsilon_2^B = \max_{\cup \partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}).$$

Для физически реалистичных соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$  попадание  $\epsilon_F$  в интервал  $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$  влечет значительное усложнение диаграмм проводимости по сравнению со случаем  $\epsilon_F \notin (\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$ . В частности, области электронной и дырочной холловской проводимости (и наличия лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми) разделяются на  $S^2$  «квазиодномерными» цепочками, состоящими из зон  $\Omega_\alpha$  (рис. 5 c, d). Количество зон  $\Omega_\alpha \subset S^2$  для значений  $\epsilon_F \in [\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$

общего положения бесконечно, что влечет появление устойчивых открытых траекторий сколь угодно сложной формы (рис. 7 a) при определенных направлениях  $\mathbf{B}$ . Точки скопления зон  $\Omega_\alpha$  отвечают здесь, как правило, появлению хаотических траекторий (типа траекторий Царева или Дынникова) на поверхности Ферми.

Нахождение функций  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  является сложной задачей, требующей большого объема нетривиальных вычислений. Поскольку мы используем здесь лишь некоторое общее приближение для соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$ , нашей целью будет являться определение интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  с некоторой (хорошей) точностью. Для этого мы используем некоторый прием, предложенный в работе [44], дающий хорошие (а в ряде случаев точные) оценки для величин  $\epsilon_1^B$  и  $\epsilon_2^B$ .

Как уже было сказано, интервал  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  определяется в нашем случае множеством значений  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$ , принимаемых на всем объединении границ зон  $W_\alpha$ , т. е.

$$\bigcup_{\alpha} \partial W_\alpha.$$

Для приближенного нахождения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  можно рассмотреть значения  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  на границе одной из наиболее крупных зон  $W_\alpha$ , где интервал значений  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  достаточно широк. Для симметричных соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$  такими зонами являются, как правило, симметричные зоны  $W_\alpha$  (существование которых было доказано в [17]). Для вычисления минимума и максимума  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  на границе таких зон достаточно, как правило,

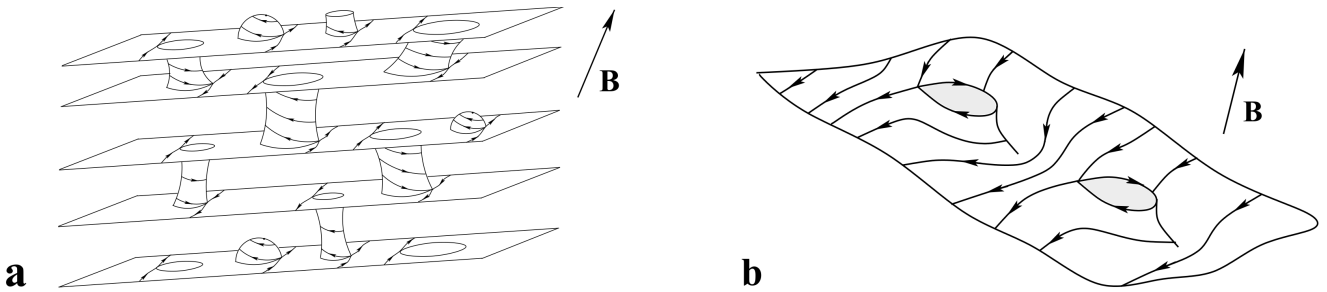


Рис. 9. *a* — Поверхность Ферми, разрезаемая цилиндрами замкнутых траекторий (2) (схематично). *b* — Носитель устойчивых открытых траекторий системы (2) в полном  $\mathbf{p}$ -пространстве

вычислить  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  в наиболее симметричных точках  $\partial W_\alpha$  (рис. 8).

Для определения границ зон  $W_\alpha$  (а также значений  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$ ) необходимо рассмотреть топологическую структуру системы (2) на поверхностях  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ , отвечающую появлению устойчивых открытых траекторий [10, 13, 17]. А именно, при любых

$$\mathbf{n} \in W_\alpha, \quad \epsilon_F \in [\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})]$$

поверхность  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$  представляет собой набор носителей открытых траекторий, разделенных цилиндрами замкнутых траекторий (2) (рис. 9 *a*).

Носители устойчивых открытых траекторий представляют собой периодически деформированные целочисленные плоскости (с отверстиями), параллельные друг другу в  $\mathbb{R}^3$  (рис. 9 *b*) [10, 13, 17]. Изменение топологической структуры (2) на поверхности  $S_F$  при направлениях  $\mathbf{n} \in \partial\Omega_\alpha$  отвечает при этом обращению в нуль высоты одного из цилиндров замкнутых траекторий, разделяющих носители открытых траекторий (рис. 10).

Границы зон  $W_\alpha$  отвечают исчезновению как минимум двух цилиндров замкнутых траекторий (2), имеющих различные (электронный и дырочный) типы [17]. Условие исчезновения сразу двух цилиндров замкнутых траекторий при  $\mathbf{n} \in \partial W_\alpha$ ,  $\epsilon_F = \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  определяет при этом как границу зоны  $W_\alpha$ , так и значения  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$ .

В общем случае исследование структуры системы (2) на поверхности Ферми довольно нетривиально и требует больших объемов вычислений (см., например, [15, 41, 43]). Это исследование заметно упрощается для симметричных зон  $W_\alpha$ , где такая структура становится более наглядной. Использование симметричных точек на границе таких зон делает при этом наиболее удобным нахождение как их положения на  $S^2$ , так и соответствующих им значений  $\tilde{\epsilon}_0(P, Q)$ .

Ниже мы проиллюстрируем нашу схему на примере простой кубической решетки, представляющей наиболее простой из рассматриваемых здесь случаев.

Случай простой кубической решетки является наиболее простым с геометрической точки зрения. Обратная решетка здесь также является простой кубической, мы будем считать длину ее ребра равной 2. Как мы уже сказали, будем рассматривать дисперсионные соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ , полученные в приближении почти свободных электронов.

Нашей целью является определение положения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  внутри интервала  $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ , а также оценка его ширины в сравнении с шириной зоны проводимости. Исходя из этого, мы можем нормировать значения  $\epsilon$  и  $p$ , так что  $\epsilon = p^2$  вблизи значения  $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$ .

Эволюция поверхности Ферми при  $\epsilon_F > 0$  начинается с появления растущих сфер с центрами в четных целочисленных точках (рис. 11 *a*) в  $\mathbb{R}^3$  с последующей их перестройкой при образовании пересечений (рис. 11 *b*).

Поверхность Ферми впервые становится протяженной во всем  $\mathbf{p}$ -пространстве при  $\epsilon_F = 1$ , это также значение, после которого на ней впервые появляются устойчивые открытые траектории системы (2) ( $\epsilon_1^A = 1$ ).

При значениях  $\epsilon_F \in (1, 2)$  ( $p_F \in (1, \sqrt{2})$ ) поверхность Ферми содержит связную компоненту, простирающуюся во всех направлениях в  $\mathbf{p}$ -пространстве, а также периодический набор компактных компонент (рис. 11 *b*). Нетрудно видеть, что среди компактных компонент есть всего три неэквивалентные, а общее число связных компонент поверхности Ферми в  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*$  равно 4.

В действительности, появление новых компонент поверхности Ферми отвечает рождению второй зоны проводимости с  $\epsilon_{\min}^{(2)} = 1$ . Поэтому в интервале

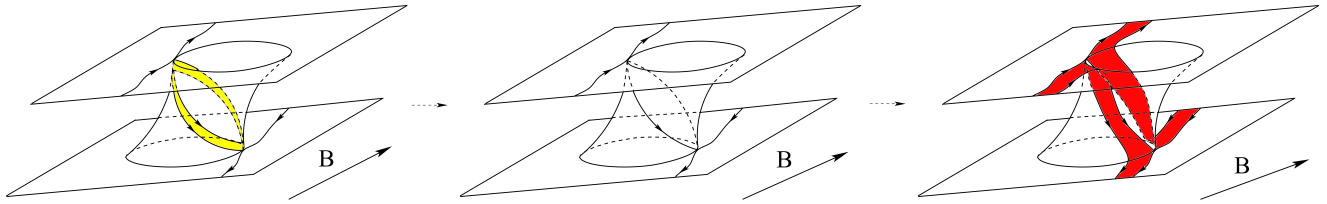


Рис. 10. Обращение в нуль высоты цилиндра замкнутых траекторий на границе зоны  $\Omega_\alpha$  и разрушение устойчивой топологической структуры системы (2) на поверхности Ферми (появление перескоков между носителями открытых траекторий)

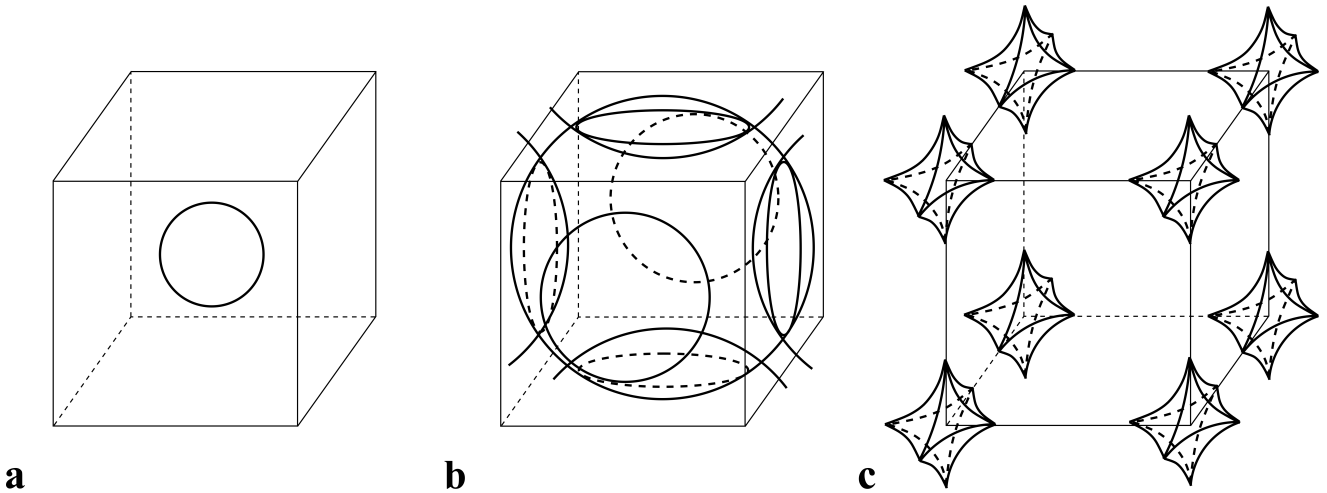


Рис. 11. *a* — Появление компонент поверхности Ферми первой зоны проводимости при  $\epsilon_F > 0$ . *b* — Рост и перестройки поверхности Ферми первой зоны проводимости при  $\epsilon_F > 0$ . *c* — Исчезновение компонент поверхности Ферми первой зоны проводимости при  $\epsilon_F \rightarrow 3$  (простая кубическая решетка)

$\epsilon \in (1, 2)$  мы должны считать неограниченную компоненту поверхностью Ферми первой зоны проводимости (с  $\epsilon_{\min}^{(1)} = 0$ ), а три компактные компоненты — поверхностью Ферми второй зоны (с  $\epsilon_{\min}^{(2)} = 1$ ).

При  $\epsilon_F = 2$  поверхность Ферми первой зоны распадается на компактные компоненты ранга нуль (эквивалентные друг другу), которые исчезают (стягиваются в точки) при  $\epsilon_F = 3$  (рис. 11 *c*). Таким образом, для первой зоны проводимости мы имеем

$$\epsilon_{\min}^{(1)} = 0, \quad \epsilon_{\max}^{(1)} = 3.$$

Поверхность Ферми второй зоны приобретает в интервале  $\epsilon \in (2, 3)$  ( $p \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ) ранг 3, простираясь во всех направлениях в  $\mathbf{p}$ -пространстве. При  $\epsilon = 3$  поверхность Ферми второй зоны распадается на компоненты ранга нуль, исчезающие при значении  $\epsilon = 4$  ( $p = 2$ ). Таким образом, для второй зоны проводимости мы имеем

$$\epsilon_{\min}^{(2)} = 1, \quad \epsilon_{\max}^{(2)} = 4.$$

Вместе с тем, при значении  $\epsilon = 2$  ( $p = \sqrt{2}$ ) от поверхности Ферми второй зоны проводимости отщепляются новые компоненты ранга нуль, образующие поверхности Ферми следующих зон проводимости и т. д. (согласно [45], каждая точка в  $\mathbf{p}$ -пространстве, попадающая внутрь  $n$  различных сфер при заданном  $\epsilon_F$  представляет заполненные состояния для  $n$  первых зон проводимости). Продолжая процедуру, мы получаем, таким образом, бесконечный набор (перекрывающихся) энергетических зон (зон проводимости).

Во всех точках  $\mathbf{p}$ -пространства мы имеем соотношения

$$\epsilon^{(s+1)}(\mathbf{p}) \geq \epsilon^{(s)}(\mathbf{p}),$$

при этом

$$\epsilon^{(s+1)}(\mathbf{p}) = \epsilon^{(s)}(\mathbf{p})$$

на пересечении поверхностей Ферми.

Как хорошо известно, в реальных приближениях почти свободных электронов последнее равен-

ство снимается из-за (малого) расщепления уровней энергии при пересечении спектров. Поверхности Ферми при этом сглаживаются в местах пересечения друг с другом, приводя к соотношениям

$$\epsilon^{(s+1)}(\mathbf{p}) > \epsilon^{(s)}(\mathbf{p}).$$

Наши результаты здесь, однако, являются приближенными (в частности, не учитывают отклонений от приближения почти свободных электронов в реальных металлах). Поэтому мы будем рассматривать форму поверхностей Ферми в том виде, в котором они описаны выше.

Приведем оценку положения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  для первой зоны проводимости, описанной выше. Как уже было сказано, мы используем значения  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  в тех точках  $\partial W_\alpha$ , где можно ожидать их наибольшего отличия друг от друга. В качестве таких значений можно использовать значения  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  на границах наиболее крупных (симметричных) зон устойчивости  $W_\alpha \subset \mathbb{S}^2$ . Здесь (и далее) мы будем использовать симметричную зону  $W_1$ , содержащую направление  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  (рис. 8).

Граничные точки зоны  $W_1$  задаются обращением в нуль высоты сразу двух цилиндров замкнутых траекторий (2), разделяющих поверхность Ферми на носители открытых траекторий при  $\mathbf{n} \in W_1$ . Для первой зоны проводимости мы, очевидно, имеем

$$\epsilon_1^A = 1, \quad \epsilon_2^A = 2,$$

так что нам достаточно рассматривать поверхности Ферми лишь для  $\epsilon_F \in (1, 2)$ . Для  $\mathbf{n} \in W_1$  соответствующие цилиндры замкнутых траекторий представлены на рис. 12. Для оценки значений  $\epsilon_1^B$  и  $\epsilon_2^B$  мы используем значения  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  в симметричных точках  $P$  и  $Q$  на границе  $W_1$ , изображенных на рис. 8.

Пусть радиус окружности, возникающей на пересечении сфер при  $1 < \epsilon_F < 2$  равен  $r$ . Исчезновение цилиндра  $C_1$  в точке  $P$  отвечает картине в плоскости  $\Pi \perp \mathbf{B}$  (проходящей через точку  $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ ), показанной на рис. 13 а. Проекция плоскости  $\Pi$  на плоскость  $yz$  при этом представляет собой прямую с углом наклона  $\alpha$ , таким что

$$\text{tg } \alpha = 1 - r$$

(рис. 13 б).

Исчезновение цилиндра  $C_2$  в точке  $P$  отвечает картине в плоскости  $\Pi \perp \mathbf{B}$  (проходящей через точку  $(1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ ), показанной на рис. 14 а. Проекция плоскости  $\Pi$  на плоскость  $yz$  при этом представляет собой прямую с углом наклона  $\alpha$ , таким что

$$\sin \alpha = r$$

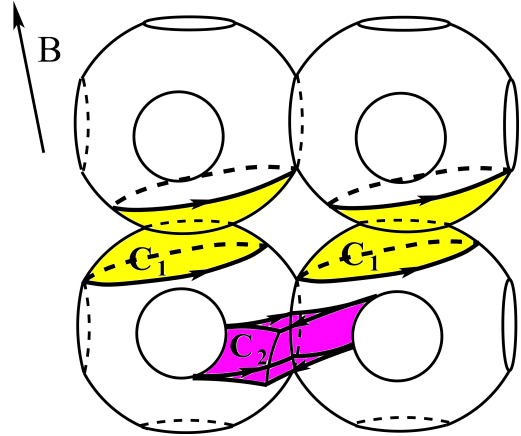


Рис. 12. Поверхность Ферми первой зоны проводимости при  $\epsilon_F \in (1, 2)$  и цилиндры замкнутых траекторий электронного ( $C_1$ ) и дырочного ( $C_2$ ) типов для  $\mathbf{n} \in W_1$  (простая кубическая решетка)

(рис. 14 б).

Из условия одновременного исчезновения цилиндров  $C_1$  и  $C_2$

$$1 - r = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}$$

мы при этом получаем  $r \simeq 0.469$  и, соответственно,

$$\tilde{\epsilon}_0(P) = 1 + r^2 \simeq 1.22$$

Исчезновение цилиндра  $C_1$  при  $\mathbf{n} = Q$  отвечает положению плоскости  $\Pi \perp \mathbf{B}$  (проходящей через точку  $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ ), представленному на рис. 15 а. Как легко видеть, угол между направлениями  $\mathbf{n}$  и  $z$  при этом определяется соотношением

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{2} \text{tg } \alpha',$$

где  $\alpha'$  — угол, представленный на рис. 15 б. Как нетрудно показать,

$$\text{tg } \alpha' = \frac{\sqrt{2 - r^2} - r}{\sqrt{2 - r^2} + r}.$$

Исчезновение цилиндра  $C_2$  при  $\mathbf{n} = Q$  отвечает положению плоскости  $\Pi \perp \mathbf{B}$  (проходящей через точку  $(1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ ), представленному на рис. 16 а. Угол между направлениями  $\mathbf{n}$  и  $z$  при этом определяется соотношением

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{2} \text{tg } \alpha' = \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Условие

$$\frac{\sqrt{2 - r^2} - r}{\sqrt{2 - r^2} + r} = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}$$

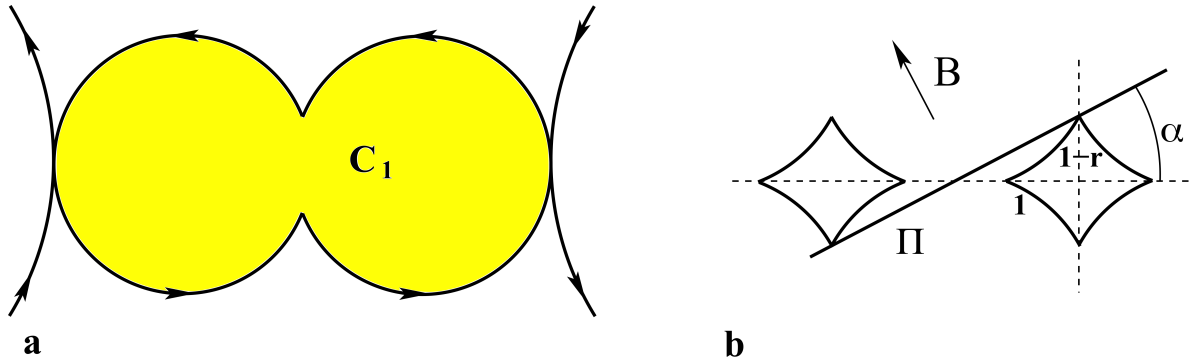


Рис. 13. *a* — Цилиндр  $C_1$  нулевой высоты в плоскости  $\Pi \perp \mathbf{B}$ , проходящей через точку  $(0, 0, 1)$  ( $n = P$ ). *b* — Проекция плоскости  $\Pi$  на плоскость  $yz$  (простая кубическая решетка)

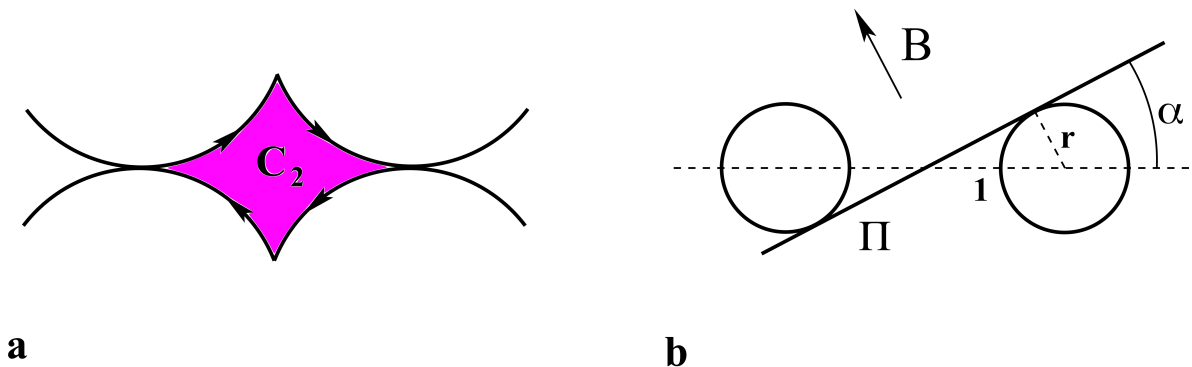


Рис. 14. *a* — Цилиндр  $C_2$  нулевой высоты в плоскости  $\Pi \perp \mathbf{B}$ , проходящей через точку  $(1, 1, 0)$  ( $n = P$ ). *b* — Проекция плоскости  $\Pi$  на плоскость  $yz$  (простая кубическая решетка)

дает значение  $r = 1/\sqrt{5}$  и, соответственно,

$$\tilde{\epsilon}_0(Q) = 1 + r^2 = 1.2.$$

Таким образом, используя нашу оценку, получаем

$$[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B] \simeq [1.2, 1.22]$$

для первой зоны проводимости.

Абстрагируясь от используемой нами нормировки, мы можем сказать, что интервал появления ультрасложных угловых диаграмм возникает вблизи значения  $0.4\epsilon_{\max}$  от дна зоны проводимости, а его длина составляет  $\simeq 0.7\%$  от ее ширины.

Отметим также, что приближение сильной связи дает в главном порядке нулевую величину интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  для простой кубической решетки (см., например, [44]), и ненулевая ширина  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  появляется там лишь в высших поправках. Приближение почти свободных электронов, как можно видеть, отличается в этом пункте от модели сильной связи.

### 3. ГРАНЕЦЕНТРИРОВАННАЯ КУБИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

Рассмотрим случай гранецентрированной кубической решетки. Обратная решетка является в этом случае кубической объемно-центрированной. Как и в предыдущем случае, мы будем считать длину ее ребра равной 2.

Рождение первых поверхностей Ферми происходит вблизи целочисленных точек  $\mathbf{p} = (n, m, l)$ , все координаты которых либо четны, либо нечетны. Как и в предыдущем разделе, вблизи этих точек мы будем полагать  $\epsilon(\mathbf{p}) = (\Delta\mathbf{p})^2$  и проведем оценку положения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  для первой зоны проводимости.

Как хорошо известно, зона Бриллюэна в рассматриваемом случае представляет собой усеченный октаэдр и имеет форму, изображенную на рис. 17 *a*. Дно первой зоны проводимости в нашей нормировке, очевидно, отвечает значению  $\epsilon_{\min} = 0$ . Верхний

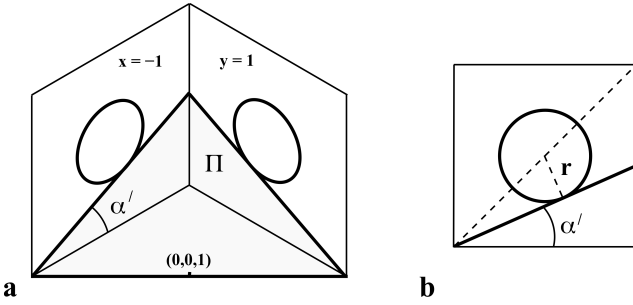


Рис. 15. *a* — Положение плоскости  $\Pi \perp \mathbf{B}$ , проходящей через точку  $(0, 0, 1)$  при  $\mathbf{n} = Q$  (показана внутренность куба). *b* — Пересечение плоскости  $x = -1$  плоскостью  $\Pi$  и угол  $\alpha'$  ( $\text{tg } \alpha = \sqrt{2} \text{tg } \alpha'$ , простая кубическая решетка)

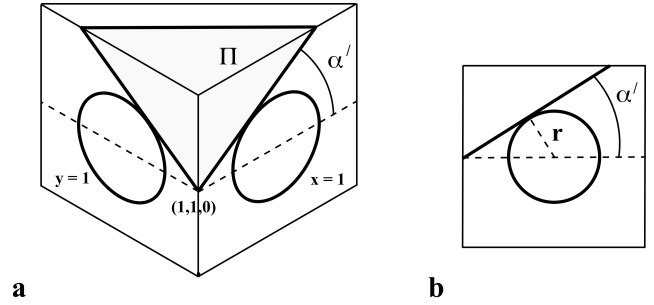


Рис. 16. *a* — Положение плоскости  $\Pi \perp \mathbf{B}$ , проходящей через точку  $(1, 1, 0)$  при  $\mathbf{n} = Q$  (показана внешность куба). *b* — Пересечение плоскости  $x = 1$  плоскостью  $\Pi$  и угол  $\alpha'$  ( $\text{tg } \alpha = \sqrt{2} \text{tg } \alpha'$ , простая кубическая решетка)

край первой зоны проводимости отвечает значениям

$$\epsilon_{\max} = \frac{13}{9}, \quad p_{\max} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

(рис. 17 *a*).

Вплоть до значения

$$\epsilon_F = \epsilon_1^A = \frac{3}{4}$$

поверхность Ферми представляет собой сферу. При  $\epsilon_F = \epsilon_1^A = 3/4$  сферы впервые касаются друг друга ( $p_1^A = \sqrt{3}/2$ , рис. 17 *b*), поверхность Ферми приобретает род 4, и на ней впервые появляются открытые траектории.

При значении

$$\epsilon_F = \epsilon^g = 1$$

( $p^g = 1$ ) род поверхности Ферми возрастает до 7.

При значении

$$\epsilon_F = \epsilon_2^A = \frac{11}{9}, \quad p_2^A = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

поверхность Ферми распадается на 6 компактных компонент, имеющих вид гантелей.

При значении

$$\epsilon_F = \epsilon' = \frac{25}{18}, \quad p' = \frac{5}{6} \sqrt{2}$$

гантели распадаются на шары дырочного типа, которые затем исчезают при  $\epsilon_F = \epsilon_{\max}$ .

Рассмотрим теперь проекцию нашей поверхности Ферми на плоскость  $yz$ . Окружности, возникающие на пересечении сфер, проецируются теперь в эллипсы с полуосями  $r$  и  $r/\sqrt{3}$  (рис. 18). Легко построить также проекции цилиндров  $C_1, C_2$  и  $C_3$  на

плоскость  $yz$  при  $\mathbf{B} \parallel z$  (рис. 18). Как и в предыдущем разделе, цилиндры  $C_1, C_2$  и  $C_3$  разрезают поверхность Ферми на носители открытых траекторий  $T_1^2, T_2^2$  при  $\mathbf{n} \in W_1$ . Отметим здесь, что цилиндр  $C_1$  имеет круглую форму, в то время как цилиндры  $C_2$  и  $C_3$  имеют углы, подобно цилиндру  $C_2$  из предыдущего раздела.

Как можно видеть, обращение в нуль высот  $C_1, C_2$  и  $C_3$  при направлении  $\mathbf{n} = P$  (рис. 8) отвечает ситуации, когда прямая, проходящая через точку  $(0, 0)$  (проекция плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ ), касается обоих эллипсов  $S_1$  и  $S_2$ , показанных на рис. 18. Данное условие, как нетрудно видеть, однозначно определяет величину  $r$ , а с ней и значение  $\tilde{\epsilon}_0(P) = 3/4 + r^2$ .

Как нетрудно проверить, уравнения эллипсов  $S_1$  и  $S_2$ , приведенных на рис. 18, имеют вид

$$(y - z)^2 + 3(y + z - 1)^2 = 2r^2$$

и

$$3(y - z - 1)^2 + (y + z - 2)^2 = 2r^2$$

соответственно.

Условие касания эллипса  $S_1$  имеет вид

$$2(1 - \text{tg } \alpha)^2 r^2 + 6(1 + \text{tg } \alpha)^2 r^2 = 3(1 - \text{tg } \alpha)^2,$$

а эллипса  $S_2$  —

$$6(1 - \text{tg } \alpha)^2 r^2 + 2(1 + \text{tg } \alpha)^2 r^2 = 3(3\text{tg } \alpha - 1)^2,$$

откуда  $r^2(P) \simeq 0.066885$  и  $\tilde{\epsilon}_0(P) \simeq 0.816885$ .

Для тангенса угла наклона  $\mathbf{B}$  к оси  $z$ , отвечающего точке  $P$  на угловой диаграмме, мы имеем при этом  $\text{tg } \alpha_P \simeq 0.45541$ .

Рассмотрим теперь направление  $\mathbf{n} = Q$  (рис. 8). При проекции на плоскость  $x + y = 0$  половина из окружностей  $S_i$  переходит в отрезки длины  $2r$ , а

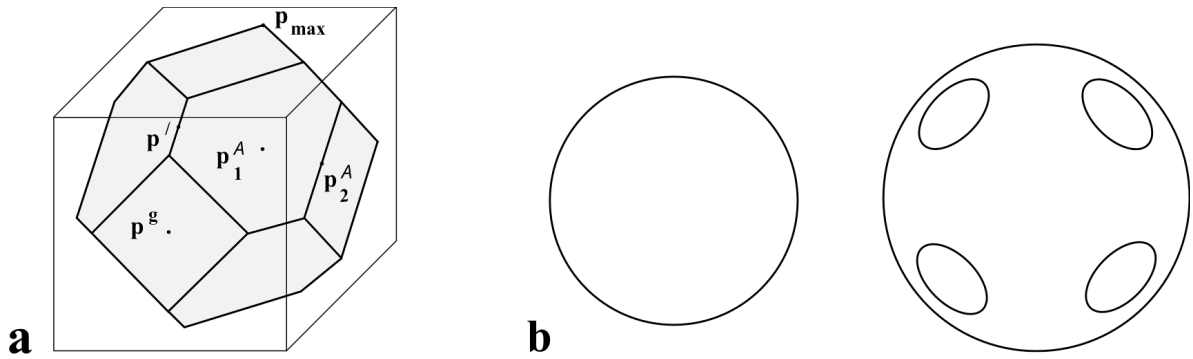


Рис. 17. а — Зона Бриллюэна для гранецентрированной кубической решетки (обратная решетка — кубическая объемно-центрированная). б — Перестройка поверхности Ферми при переходе через  $\epsilon_F = 3/4$

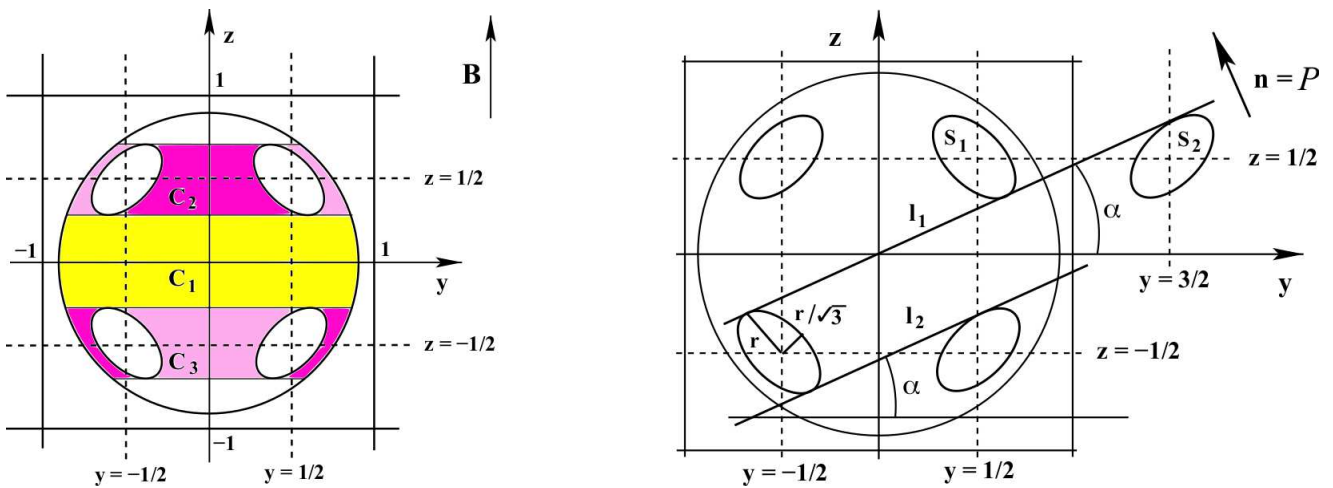


Рис. 18. Проекция поверхности Ферми на плоскость  $yz$  при  $\mathbf{B} \parallel z$  и исчезновение цилиндров  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  при  $\mathbf{n} = P$  (гранецентрированная решетка)

вторая половина — в эллипсы с полуосями  $r$  и  $r\sqrt{2/3}$  (рис. 19). Исчезновение цилиндров  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  задается теперь условием, что прямая  $l_1$ , проходящая через точки  $D$  и  $E$ , и прямая  $l_2$ , касающаяся эллипсов  $S_1$  и  $S_2$  (проекции плоскостей  $\Pi_{1,2} \perp \mathbf{B}$  на плоскость  $x + y = 0$ ), имеют один и тот же угол наклона  $\alpha$  (рис. 19). Угол  $\alpha$ , представленный на рис. 19, является углом наклона  $\mathbf{B}$  к оси  $z$  и определяет положение точки  $Q$ .

Как нетрудно видеть, уравнения эллипсов  $S_1$  и  $S_2$ , приведенных на рис. 19, имеют вид

$$3(z - 1/2)^2 + 2w^2 = 2r^2$$

и

$$3(z - 1/2)^2 + 2(w - \sqrt{2})^2 = 2r^2$$

соответственно, где  $w = (y - x)/\sqrt{2}$ .

Можно видеть, что, с одной стороны,

$$\text{tg } \alpha = \frac{1/2 - r\sqrt{2/3}}{1/\sqrt{2} + r/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}r}{\sqrt{6} + 2r}.$$

(исчезновение цилиндра  $C_1$ ).

С другой стороны, условие касания прямой

$$(z - 1/2) = \text{tg } \alpha (w - 1/\sqrt{2})$$

и эллипсов  $S_1$  и  $S_2$  приводит к соотношению

$$\text{tg } \alpha = \frac{2r}{\sqrt{3} - 6r^2}$$

Приведенные соотношения дают в результате

$$r(Q) \simeq 0.264889, \quad \text{tg } \alpha_Q \simeq 0.329890,$$

$$\tilde{\epsilon}_0(Q) = \frac{3}{4} + r^2 \simeq 0.820166.$$

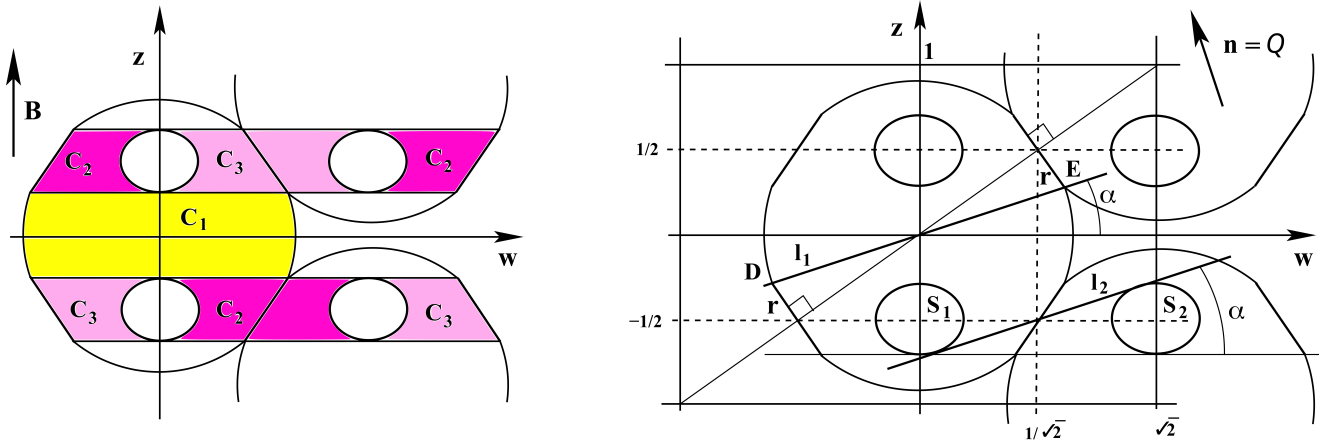


Рис. 19. Проекция поверхности Ферми на плоскость  $x + y = 0$  при  $\mathbf{B} \parallel z$  и исчезновение цилиндров  $C_1, C_2$  и  $C_3$  при  $\mathbf{n} = Q$  (гранцентрированная решетка)

Таким образом, для случая гранцентрированной решетки, мы можем записать

$$[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B] \simeq [0.817, 0.820].$$

Можно видеть, что, согласно нашей оценке, интервал  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  лежит в области энергий, где род поверхности Ферми равен 4, и увеличение рода  $S_F$  до 7 при  $\epsilon_F = 1$  не влияет на возникновение ультрасложных угловых диаграмм.

Снова абстрагируясь от выбранной нами нормировки, мы можем сказать, что в приближении почти свободных электронов для кубической гранцентрированной решетки интервал появления ультрасложных угловых диаграмм в первой зоне проводимости лежит на расстоянии  $\simeq 0.57\epsilon_{\max}$  от ее дна и занимает  $\simeq 0.2\%$  от ширины зоны.

#### 4. ОБЪЕМНО-ЦЕНТРИРОВАННАЯ КУБИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

В этом разделе мы рассмотрим случай объемно-центрированной кубической решетки. Обратная решетка в этом случае является кубической гранцентрированной, мы будем полагать длину ее ребра равной 2. Как и в предыдущем случае, нас будет интересовать здесь первая зона проводимости в приближении почти свободных электронов.

Рождение первых (компактных) компонент поверхности Ферми происходит теперь вблизи целочисленных точек  $(m, n, l)$   $\mathbf{p}$ -пространства, таких что

$$m + n + l = 2s, \quad s \in \mathbb{Z}$$

Как и выше, мы будем полагать вблизи этих точек  $\epsilon(\mathbf{p}) = (\Delta\mathbf{p})^2$ . Зона Бриллюэна имеет теперь вид, представленный на рис. 20 а.

Поверхность Ферми остается сферической (в торе  $\mathbb{T}^3$ ) в интервале  $\epsilon_F \in (0, 1/2)$ .

При значении

$$\epsilon_F = \epsilon_1^A = 1/2 \quad (p_1^A = 1/\sqrt{2})$$

происходит первое касание сфер в  $\mathbf{p}$ -пространстве (в точках  $p_1^A$ ) и поверхность Ферми приобретает род 6 (рис. 20 б).

При значении

$$\epsilon_F = \epsilon_2^A = 2/3 \quad (p_2^A = \sqrt{2/3})$$

сферы достигают ребер зоны Бриллюэна (в точках  $p_2^A$ ) и поверхность Ферми снова распадается на компоненты рода нуль, которые исчезают при значениях

$$\epsilon_F = \epsilon' = 3/4 \quad (p' = \sqrt{3}/2)$$

и

$$\epsilon_F = \epsilon_{\max} = 1 \quad (p_{\max} = 1).$$

Мы, конечно, будем рассматривать здесь поверхности Ферми при  $\epsilon_F \in [\epsilon_1^A, \epsilon_2^A]$  (рис. 20 б).

Как и в предыдущих разделах, нас будут интересовать значения  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  в симметричных точках границы  $W_1$  (точки  $P$  и  $Q$ , рис. 8).

Для определения структуры системы (2) нам, как и ранее, надо описать цилиндры замкнутых траекторий, возникающих на поверхности Ферми при  $\mathbf{n} \in W_1$ . Вблизи направления  $\mathbf{n} \parallel z$  количество таких цилиндров равно 5, при этом они разрезают поверхность Ферми на 4 тора с отверстиями (носителя

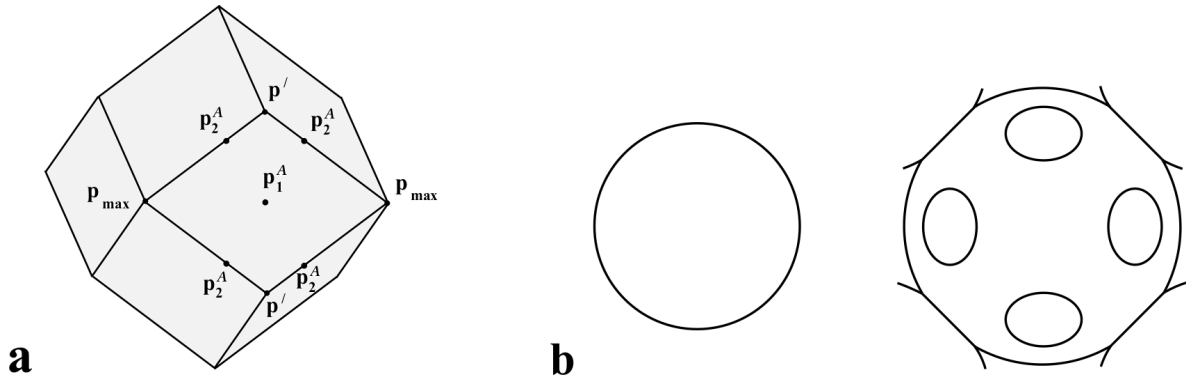


Рис. 20. а — Зона Бриллюэна для кубической объемно-центрированной решетки (обратная решетка — кубическая гранецентрированная). б — Перестройка поверхности Ферми при переходе через  $\epsilon_F = 1/2$

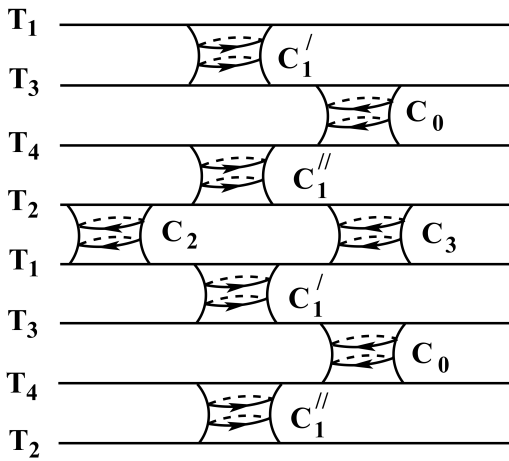


Рис. 21. Схема соединения носителей открытых траекторий и разделяющих их цилиндров замкнутых траекторий вблизи направления  $\mathbf{V} \parallel z$  (объемно-центрированная кубическая решетка)

открытых траекторий)  $T_{1,2,3,4}^2$ , вложенных в трехмерный тор:

$$T_{1,2,3,4}^2 \subset T^3 = \mathbb{R}^3 / L^*$$

В полном  $\mathbf{p}$ -пространстве мы имеем 4 неэквивалентных носителя открытых траекторий, которые представляют собой периодически деформированные плоскости (с отверстиями), параллельные плоскости  $xy$  (рис. 21).

Высота цилиндров замкнутых траекторий максимальна при  $\mathbf{V} \parallel z$ , а их структура во многом аналогична структуре для гранецентрированной решетки. В частности, здесь также возникают цилиндры (дырочного типа)  $C_2$  и  $C_3$ , совершенно аналогичные цилиндрам  $C_{2,3}$  для простой и гранецентри-

рованной решеток (рис. 12, 18). Что касается цилиндра  $C_1$  (рис. 12, 18), теперь из-за наличия дополнительных «ручек» (и большего рода поверхности Ферми) он распадается на два цилиндра  $C_1'$  и  $C_1''$  электронного типа и цилиндр  $C_0$  дырочного типа (аналогичный цилиндрам  $C_2$  и  $C_3$ ).

На рис. 22 представлено расположение цилиндров  $C_j$  на поверхности Ферми в  $\mathbf{p}$ -пространстве при  $\mathbf{V} \parallel z$ . На рис. 21 представлена также схема соединений цилиндров  $C_j$  с носителями открытых траекторий  $T_i^2$  при направлениях  $\mathbf{V}$ , близких к направлению  $z$ .

Нетрудно видеть, что при отклонении  $\mathbf{V}$  по направлению к точке  $P$  цилиндры  $C_2$  и  $C_3$  (они имеют меньшую высоту) исчезают раньше цилиндра  $C_0$ . Таким образом, точка  $P$  на границе зоны  $W_1$  определяется исчезновением цилиндров  $C_1'$  и  $C_1''$  (электронного типа) и цилиндра  $C_0$  (дырочного типа).

Исчезновение цилиндров  $C_1'$ ,  $C_0$  и  $C_1''$  при  $\mathbf{n} = P$  показано на рис. 22. Проекция окружностей  $S_i$  на плоскость  $yz$  являются теперь либо отрезками длины  $2r$  либо эллипсами с полуосями  $r$  и  $r/\sqrt{2}$ . Как нетрудно видеть (рис. 22), уравнения проекций  $S_1$  и  $S_2$  имеют при этом вид

$$2(y \pm 1/2)^2 + z^2 = r^2.$$

Положение точки  $P$  и величина  $r(P)$  определяются равенством угла наклона касательных (проекций плоскостей  $\Pi \perp \mathbf{V}$  на плоскость  $yz$ ) к проекциям окружностей  $S_i$  на плоскость  $yz$ , как показано на рис. 22. Как нетрудно проверить, условие касания прямой  $l_2$  с эллипсами  $S_1$  и  $S_2$  имеет вид

$$\text{tg } \alpha = \frac{2r}{\sqrt{1 - 2r^2}}.$$

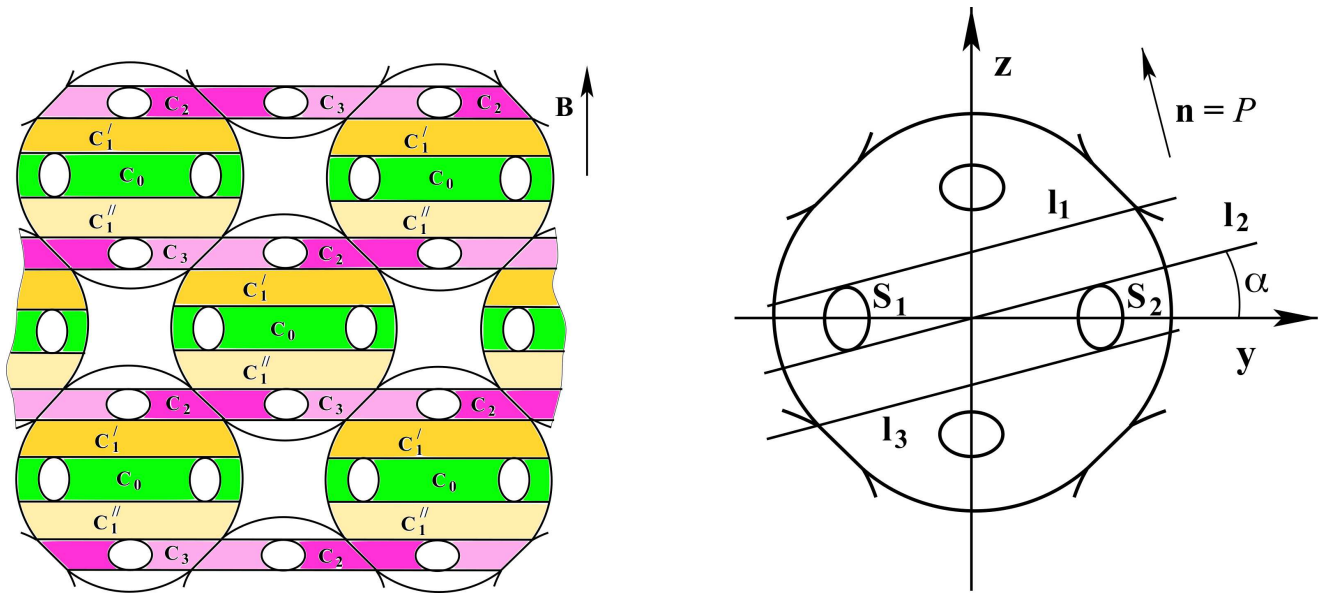


Рис. 22. Проекция цилиндров замкнутых траекторий на плоскость  $yz$  при  $\mathbf{B} \parallel z$  и исчезновение цилиндров  $C_1'$ ,  $C_0$  и  $C_1''$  при  $\mathbf{n} = P$  (объемно-центрированная решетка)

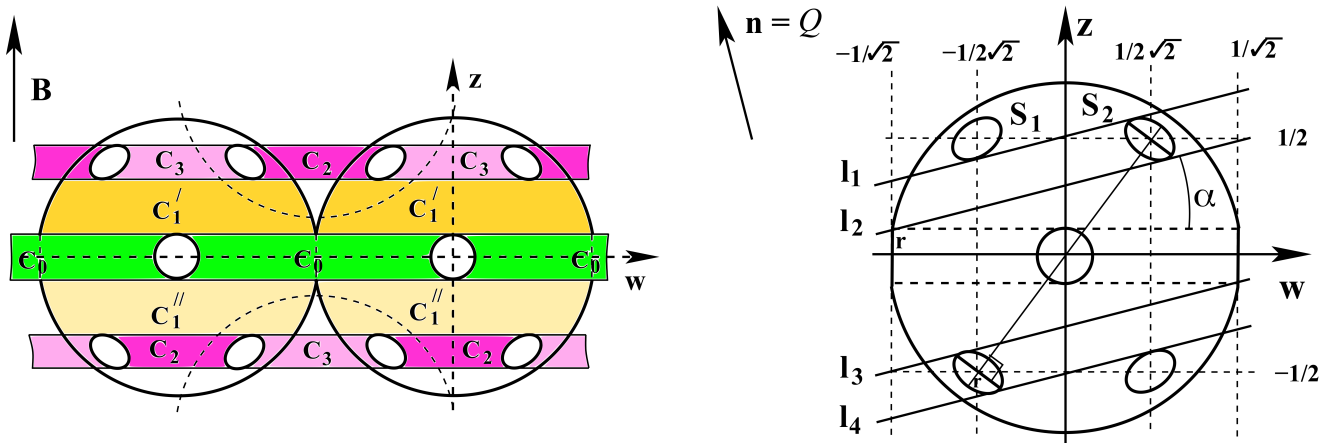


Рис. 23. Проекция цилиндров замкнутых траекторий на плоскость  $x + y = 0$  при  $\mathbf{B} \parallel z$  и исчезновение цилиндров  $C_1'$ ,  $C_1''$ ,  $C_2$  и  $C_3$  при  $\mathbf{n} = Q$  (объемно-центрированная решетка)

Прямая  $l_1$  при этом задается уравнением

$$z = \frac{2r}{\sqrt{1-2r^2}}(y + 1).$$

Согласно рис. 22, она должна содержать точку

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} - \frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда

$$(1 - r\sqrt{2})\sqrt{1 - 2r^2} = 2r(3 + r\sqrt{2}).$$

Из приведенных выше соотношений непосредственно получаем

$$r(P) \simeq 0.126932, \quad \text{tg } \alpha_P \simeq 0.258056,$$

$$\tilde{\epsilon}_0(P) \simeq 0.516112$$

Рассмотрим теперь направление  $\mathbf{n} = Q$ . На рис. 23 показана проекция поверхности Ферми на плоскость  $x + y = 0$ . Проекция окружностей  $S_i$  представляют здесь либо отрезки длины  $2r$ , либо окружности радиуса  $r$ , либо эллипсы с полуосями  $r$  и  $r/2$ .

Как нетрудно видеть, центры эллипсов  $S_1$  и  $S_2$  лежат при этом в точках с координатами

$$w = \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad z = \frac{1}{2}, \quad (w = (y - x)/\sqrt{2}).$$

Как нетрудно показать, большие полуоси эллипсов  $S_1$  и  $S_2$  ортогональны отрезкам, соединяющим их центры с началом координат.

Теперь можно видеть, что при отклонении  $\mathbf{B}$  по направлению к точке  $Q$  цилиндры  $C_0$  (их проекции на плоскость  $x + y = 0$  имеют гораздо большую длину) исчезают раньше цилиндров  $C_2$  и  $C_3$ . Таким образом, точка  $Q$  на границе зоны  $W_1$  определяется исчезновением цилиндров  $C'_1$  и  $C''_1$  (электронного типа) и цилиндров  $C_2$  и  $C_3$  (дырочного типа).

Как и раньше, проекции плоскостей, ортогональных  $\mathbf{B}$ , на плоскость  $x + y = 0$  представляют прямые с углом наклона  $\alpha$  по отношению к оси  $w$ . Условия одновременного исчезновения цилиндров  $C'_1, C''_1, C_2$  и  $C_3$  задается условием одновременного касания проекций  $S_i$  такими прямыми, как показано на рис. 23.

Эллипсы  $S_1$  и  $S_2$  задаются уравнениями

$$4 \left( \sqrt{2}z \mp w - \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^2 + (z \pm \sqrt{2}w)^2 = 3r^2.$$

Уравнения прямых  $l_1$  и  $l_2$ , как нетрудно показать, имеют при этом вид

$$z = w \operatorname{tg} \alpha + 1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - r$$

и

$$z - r = \left( w + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Условия правильного касания прямых  $l_1, l_2$  и эллипсов  $S_1, S_2$ , как можно показать, задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \sqrt{2}r \sqrt{(\sqrt{2} + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 4(1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)^2} &= \\ &= 5\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha + 2\sqrt{6}r - \sqrt{6}, \\ \sqrt{2}r \sqrt{(\sqrt{2} - \operatorname{tg} \alpha)^2 + 4(1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)^2} &= \\ &= \sqrt{6} - 3\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 2\sqrt{6}r, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} r(Q) &\simeq 0.123591, \quad \operatorname{tg} \alpha_Q = 0.255360, \\ \tilde{\epsilon}_0(Q) &\simeq 0.515275. \end{aligned}$$

Таким образом, для случая объемно-центрированной решетки мы можем записать

$$[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B] \simeq [0.5153, 0.5161].$$

Абстрагируясь от выбранной нами нормировки, мы можем сказать, что в приближении почти свободных электронов для кубической объемно-центрированной решетки интервал появления ультрасложных угловых диаграмм в первой зоне проводимости лежит на расстоянии  $\simeq 0.515\epsilon_{\max}$  от ее дна и занимает  $\simeq 0.1\%$  от ширины зоны.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведена оценка интервалов появления ультрасложных диаграмм проводимости в приближении почти свободных электронов для металлов кубической симметрии. Как следует из результатов исследования, появление таких диаграмм отвечает чрезвычайно узким энергетическим интервалам  $\epsilon_F \in [\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  внутри зоны проводимости, что совпадает с аналогичными оценками в приближении сильной связи [44]. С нашей точки зрения, полученные результаты во многом объясняются высокой симметрией кристаллических решеток, а также наиболее простыми аналитическими свойствами соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$ , рассмотренных в этих работах. В частности, мы ожидаем более широких интервалов появления ультрасложных угловых диаграмм проводимости для проводников с более сложными соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ . В общем случае для наблюдения ультрасложных угловых диаграмм проводимости, вероятно, необходимы внешние воздействия на кристалл, сдвигающие положение  $\epsilon_F$  внутри соответствующей разрешенной зоны.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*, Wiley, New York (1963) [Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967)].
2. J. M. Ziman, *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge Univ. Press (1972) [Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1974)].
3. N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing (1976) [Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва (1979)].

4. A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*, Elsevier Science & Technology, Oxford (1988) [А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987)].
5. I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel, and M. I. Kaganov, *Sov. Phys. JETP* **4**, 41 (1957) [И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *ЖЭТФ* **31**, 63 (1956)].
6. I. M. Lifshitz and V. G. Peschansky, *Sov. Phys. JETP* **8**, 875 (1959) [И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **35**, 1251 (1958)].
7. I. M. Lifshitz and V. G. Peschansky, *Sov. Phys. JETP* **11**, 137 (1960) [И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **38**, 188 (1960)].
8. I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel, and M. I. Kaganov, *Electron Theory of Metals*, Consultants Bureau, Adam Hilger, New York (1973) [И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971)].
9. S. P. Novikov, *Russ. Math. Surv.* **37**, 1 (1982) [С. П. Новиков, *УМН* **37**, 3 (1982)].
10. A. V. Zorich, *Russ. Math. Surv.* **39**, 287 (1984) [А. В. Зорич, *УМН* **39**, 235 (1984)].
11. I. A. Dynnikov, *Russ. Math. Surv.* **47**, 172 (1992) [И. А. Дынников, *УМН* **47**, 161 (1992)].
12. S. P. Tsarev, *Seminar talks (1992–1993)* [С. П. Царев, *Доклады на семинарах (1992–93)*].
13. I. A. Dynnikov, *Math. Notes* **53**, 494 (1993) [И. А. Дынников, *Математические заметки* **53**, 57 (1993)].
14. A. V. Zorich, in *Proc. of Geometric Study of Foliations, (Tokyo, November 1993)*, ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
15. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-torus: Geometry of Plane Sections*, in *Proc. of ECM2, BuDA* (1996).
16. I. A. Dynnikov, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
17. I. A. Dynnikov, *Russ. Math. Surv.* **54**, 21 (1999) [И. А. Дынников, *УМН* **54**, 21 (1999)].
18. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *Bull. Braz. Math. Soc., New Series* **34**, 171 (2003).
19. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *J. Stat. Phys.* **115**, 31 (2004).
20. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *Russ. Math. Surv.* **74**, 141 (2019) [А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *УМН* **74**, 149 (2019)].
21. S. P. Novikov and A. Ya. Maltsev, *JETP Lett.* **63**, 855 (1996) [С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 809 (1996)].
22. A. Ya. Maltsev, *J. Exp. Theor. Phys.* **127**, 1087 (2018) [А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **154**, 1183 (2018)].
23. A. Ya. Maltsev, *J. Exp. Theor. Phys.* **129**, 116 (2019) [А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **156**, 140 (2019)].
24. A. Ya. Maltsev, *J. Exp. Theor. Phys.* **85**, 934 (1997) [А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **112**, 1710 (1997)].
25. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *Proc. Steklov Institute of Mathematics* **302**, 279 (2018) [А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *Труды МИАН* **302**, 296 (2018)].
26. A. Zorich, *How Do the Leaves of Closed 1-Form Wind around a Surface*, «Pseudoperiodic Topology», ed. by V. I. Arnold, M. Kontsevich, and A. Zorich, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, vol. 197, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
27. R. De Leo, *Russ. Math. Surv.* **55**, 166 (2000) [Р. Де Лео, *УМН* **55**, 181 (2000)].
28. R. De Leo, *Russ. Math. Surv.* **58**, 1042 (2003) [Р. Де Лео, *УМН* **58**, 197 (2003)].
29. R. De Leo, *Phys. Lett. A* **332**, 469 (2004).
30. R. De Leo, *Physica B Condens. Matter* **362**, 62 (2005).
31. R. De Leo, *Exp. Math.* **15**, 109 (2006).
32. R. De Leo and I. A. Dynnikov, *Russ. Math. Surv.* **62**, 990 (2007) [Р. Де Лео, И. А. Дынников, *УМН* **62**, 151 (2007)].
33. I. A. Dynnikov, *Proc. Steklov Institute of Mathematics*, **263**, 65 (2008) [И. А. Дынников, *Труды МИАН* **263**, 72 (2008)].
34. R. De Leo and I. A. Dynnikov, *Geom. Dedicata* **138**, 51 (2009).
35. A. Skripchenko, *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **32**, 643 (2012).
36. A. Skripchenko, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **43**, 253 (2013).
37. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *On Typical Leaves of a Measured Foliated 2-Complex of Thin Type, Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012–2014*, *Adv. Math. Sci.*, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **234**, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, and I. M. Krichever, AMS, Providence, RI (2014), p. 173, arXiv:1309.4884.

38. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Symmetric Band Complexes of Thin Type and Chaotic Sections Which Are Not Actually Chaotic*, Trans. Moscow Math. Soc., vol. 76 (2015), p. 287.
39. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Invent. Math. **206**, 109 (2016).
40. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Bull. Soc. Math. Fr. **144**, 539 (2016).
41. R. De Leo, *A Survey on Quasiperiodic Topology, Advanced Mathematical Methods in Biosciences & Applications*, ed. by F. Berezovskaya and B. Toni, Springer (2018), arXiv:1711.01716.
42. I. Dynnikov, P. Hubert, and A. Skripchenko, Int. Math. Res. Not. (2022), p. 1 (published online), arXiv:2011.15043.
43. I. A. Dynnikov, A. Ya. Maltsev, and S. P. Novikov, Russ. Math. Surv. **77**, 1061 (2022), arXiv:2306.11257 [И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, УМН **77**, 109 (2022)].
44. A. Ya. Maltsev, Zh. Exp. Teor. Fiz. **169**, 82 (2026) [А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **169**, 82 (2026)].
45. W. A. Harrison, Phys. Rev. **118**, 1190 (1960).

## Ultra-Complex Conductivity Diagrams in the Nearly Free Electron Approximation

*A. Ya. Maltsev*

Landau Institute for Theoretical Physics of the Russian Academy of Sciences  
142432, Chernogolovka, Moscow region, Russia

### Abstract

We investigate the possibility of the emergence of ultra-complex conductivity diagrams in the nearly free electron approximation for metals with cubic symmetry. Estimates show that the emergence of such diagrams requires the Fermi level to fall into very narrow energy intervals within the conduction band. In our view, this circumstance is mostly due to the high symmetry and the simplest analytical form of the dispersion relations  $\epsilon(\mathbf{p})$  under consideration.

**Keywords:** complex Fermi surface, galvanomagnetic phenomena

**Funding.** The research was not sponsored.

**Conflict of interest.** The author declares no conflict of interest.