ЖЭТФ/JETP, 2026, том 170, вып. 6 (12), стр. 561–570 © 2026

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА – ПУАССОНА: ФАЗОВЫЙ ПОТОК В КОСМИЧЕСКОЙ ПАУТИНЕ

Н. Н. Фимин*

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук» 125047, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 апреля 2026 г.,
после переработки 10 августа 2026 г.
Принята к публикации 23 августа 2026 г.

Предложен новый кинетико-геометрический подход к локальной динамике бесстолкновительного вещества на основе системы Власова – Пуассона с космологической постоянной. Из ньютоновского предела уравнений Эйнштейна выведен член $(\Lambda c^2/3)\mathbf{r}$ в уравнениях характеристик. Посредством подъема Эйзенхарта – Баргманна получено уравнение отклонения соседних траекторий и выделен изотропный дефокусирующий вклад космологической постоянной. Для трехмерного фазового слоя сформулированы условия регулярной складки координатной проекции, получены профиль концентрации массы $\rho_\nu \sim \zeta^{-1/2}$ и оценка разделения скоростных ветвей. Выведена декомпозиция градиента скорости, отделяющая изотропное расширение от анизотропной деформации и локального вращения.

Ключевые слова: система Власова – Пуассона, космологическая постоянная, космическая паутина, подъем Эйзенхарта – Баргманна, фазовый поток, регулярная складка, обратная задача

DOI: 10.31857/S0044451026120044

1. ВВЕДЕНИЕ

Крупномасштабное распределение вещества во Вселенной имеет ячеистую структуру, известную как космическая паутина. Галактики и темная материя концентрируются в узлах, нитях и стенках, а значительная часть объема занята разреженными областями — космологическими войдами. В кинетическом описании эта пространственная картина возникает как координатная проекция движения бесстолкновительного вещества в фазовом пространстве.

Де-ситтеровская стадия раннего ускоренного расширения и последующая фридмановская эволюция однородного фона описываются общей теорией относительности. В фридмановскую эпоху глобальная эволюция масштабного фактора определяется уравнениями Эйнштейна, а локальная динамика слабого поля при нерелятивистских скоростях и размерах, существенно меньших хаббловского радиуса, задается их ньютоновским пределом. Переход к ньютоновской динамике и уравнению Пуассона обсуждается в гл. VI книги [1]; точный ньютоновский предел при $\Lambda \neq 0$ получен в [2]. Разделение глобального космологического фона и локальной динамики исследовано также в [3, 4].

Система Власова – Пуассона является установленным кинетическим описанием космологического бесстолкновительного вещества. Космологическая задача Коши для этой системы и глобальная разрешимость периодических возмущений однородного состояния построены в [5]. Классические решения в ускоренно расширяющейся ньютоновской космологической постановке исследованы в [6]. Геометрия трехмерного фазового слоя позволяет определять пространственную плотность, каустические поверхности, число потоков и их скорости [7].

Стандартное описание крупномасштабной структуры восходит к теории роста возмущений, приближению Зельдовича и представлению космической паутины как анизотропной гравитационной сети [8–12]. Войды являются динамическими

* E-mail: oberon@kiam.ru

элементами этой структуры и используются как самостоятельные космологические объекты [13, 14].

Новизна развиваемого в статье подхода состоит в объединении локальных уравнений характеристик, геометрического уравнения их отклонения и теории особенностей координатной проекции фазового слоя в единую аналитическую схему. Подъем Эйзенхарта – Баргманна применяется для представления ньютоновских характеристик в виде геодезических и вычисления отклонения соседних траекторий [15–17]. Геометрия регулярных складок и разделение пространственно совпадающих ветвей по скорости исследованы в работе автора [18]; классификация складок как особенностей гладких отображений изложена в [19].

Цель статьи состоит в построении единого локального описания пяти взаимосвязанных эффектов: происхождения космологического члена в кинетическом уравнении; обратного продолжения характеристик в разреженной области; геометрического уравнения их отклонения; образования регулярной складки координатной проекции фазового слоя; переноса массы между соседними разреженными областями. Дополнительно получена декомпозиция локального градиента скорости, отделяющая изотропный вклад космологической постоянной от анизотропной деформации.

2. СИСТЕМА ВЛАСОВА – ПУАССОНА С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ЧЛЕНОМ

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — рассматриваемый интервал времени, а

$$\Gamma = \mathbb{R}^3_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^3_{\mathbf{u}} \tag{1}$$

— одночастичное фазовое пространство. Точка $z = (\mathbf{r}, \mathbf{u}) \in \Gamma$ задает положение $\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3)$ и скорость $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ частицы бесстолкновительного вещества. Физическая скорость связана с положением равенством

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{2}$$

Индексы $i, j = 1, 2, 3$ нумеруют пространственные координаты, δ_{ij} — символ Кронекера (компоненты единичной матрицы), $\partial_i = \partial/\partial r^i$.

Функция распределения определяется отображением

$$f : I \times \Gamma \longrightarrow [0, \infty), \quad (t, \mathbf{r}, \mathbf{u}) \longmapsto f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}). \tag{3}$$

При фиксированном t величина $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ является массовой плотностью на фазовом пространстве относительно меры $d^3r\, d^3u$: произведение $f\, d^3r\, d^3u$ равно массе в соответствующем элементе фазового объема. Пространственная массовая плотность равна

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})\, d^3u. \tag{4}$$

Рассмотрим локальную область размера L. Пусть $a(t)$ — фридмановский масштабный фактор, а $H(t) = \dot{a}/a$ — параметр Хаббла. Ньютоновское приближение используется при условиях

$$L \ll \frac{c}{H}, \quad \frac{|\Phi_{\text{eff}}|}{c^2} \ll 1, \quad \frac{|\mathbf{u}|}{c} \ll 1, \tag{5}$$

где c — скорость света, Φ_{eff} — эффективный гравитационный потенциал.

Уравнения Эйнштейна с космологической постоянной имеют вид

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Здесь $G_{\mu\nu}$ — тензор Эйнштейна, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса, G — гравитационная постоянная, Λ — космологическая постоянная. В слабом поле полагают

$$g_{00} \simeq -\left(1 + \frac{2\Phi_{\text{eff}}}{c^2}\right). \tag{7}$$

Ведущий нерелятивистский предел уравнений (6) дает [1, 2, 20]

$$\Delta\Phi_{\text{eff}} = 4\pi G\rho - \Lambda c^2, \quad \Delta = \delta^{ij}\partial_i\partial_j. \tag{8}$$

Представим потенциал в виде

$$\Phi_{\text{eff}}(t, \mathbf{r}) = \Phi(t, \mathbf{r}) - \frac{\Lambda c^2}{6} r^2, \quad r^2 = \delta_{ij} r^i r^j, \tag{9}$$

где Φ — гравитационный потенциал, создаваемый распределением вещества. Он определяется совместно с f уравнениями

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad \rho = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f\, d^3u. \tag{10}$$

Слово «самосогласованный» означает, что Φ не задается независимо: сначала из f вычисляется ρ, затем из (10) с выбранными граничными данными определяется Φ.

Матрицу вторых производных Φ обозначим через

$$A_{ij}(t, \mathbf{r}) = \partial_i\partial_j\Phi(t, \mathbf{r}). \tag{11}$$

Ее бесследовая часть

$$\mathcal{T}_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\Phi \tag{12}$$

называется приливной матрицей; она описывает анизотропную часть относительного ускорения соседних частиц.

Характеристикой системы Власова – Пуассона называется кривая $t \mapsto (\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)) \in \Gamma$, удовлетворяющая уравнениям

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}} = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi_{\text{eff}} = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi + \frac{\Lambda c^2}{3}\mathbf{r}. \tag{13}$$

Кривая $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ является пространственной траекторией той же частицы.

Для бесстолкновительного вещества выполняется уравнение непрерывности в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (f\mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{u}} \cdot (f\dot{\mathbf{u}}) = 0. \tag{14}$$

Поскольку $\mathbf{u}$ не зависит от $\mathbf{r}$ как независимой фазовой переменной, а ускорение в (13) не зависит от $\mathbf{u}$, уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \left(-\nabla_{\mathbf{r}}\Phi + \frac{\Lambda c^2}{3}\mathbf{r}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f = 0. \tag{15}$$

Член $(\Lambda c^2/3)\mathbf{r}$ в уравнениях характеристик и в уравнении Власова следует из модифицированного уравнения Пуассона (8); он не вводится как независимая феноменологическая добавка. В физических координатах этот член присутствует явно. В сопутствующих координатах $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$ после полного вычитания однородного фридмановского фона влияние Λ входит через $a(t)$ и уравнения Фридмана, поэтому отдельного члена $\Lambda\mathbf{x}$ в уравнении движения относительно фона нет.

Для определения характеристического потока введем фазовое векторное поле

$$X_f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}) = \left(\mathbf{u}, -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi_{\text{eff}}(t, \mathbf{r})\right). \tag{16}$$

Индекс f напоминает, что Φ определяется функцией распределения. Для начального состояния $z(t_0) = z_0$ решение задачи

$$\dot{z} = X_f(t, z), \quad z(t_0) = z_0, \tag{17}$$

задает отображение

$$\mathcal{U}_{t,t_0} : \Gamma \longrightarrow \Gamma, \quad \mathcal{U}_{t,t_0}(z_0) = z(t; t_0, z_0). \tag{18}$$

Семейство отображений $\{\mathcal{U}_{t,t_0}\}$ называется характеристическим потоком в фазовом пространстве. На интервале существования достаточно гладкого классического решения каждое отображение $\mathcal{U}_{t,t_0}$ является диффеоморфизмом, т. е. гладким взаимно однозначным отображением с гладким обратным, а обратным к нему служит $\mathcal{U}_{t_0,t}$. Вдоль каждой характеристики

$$\frac{d}{dt} f(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)) = 0. \tag{19}$$

3. ОБРАТНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК

Пусть в момент t_0 задано фазовое состояние $(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$, причем $\mathbf{r}_0$ находится в рассматриваемой разреженной области. Обратное интегрирование системы (13) восстанавливает предшествующий участок соответствующей характеристики.

Введем обозначение

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}. \tag{20}$$

На участке, где ускорение, создаваемое распределением вещества, мало по сравнению с космологическим вкладом,

$$|\nabla_{\mathbf{r}}\Phi(t, \mathbf{r})| \ll H_\Lambda^2 |\mathbf{r}|, \tag{21}$$

уравнение движения приближенно имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}} = H_\Lambda^2 \mathbf{r}. \tag{22}$$

Его общее решение равно

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}e^{H_\Lambda t} + \mathbf{B}e^{-H_\Lambda t}, \tag{23}$$

где постоянные векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяются положением и скоростью характеристики.

Для редуцированного локального уравнения (22) рассмотрим асимптотическое обратное продолжение $t \to -\infty$. Условие ограниченности $\mathbf{r}(t)$ при таком продолжении исключает возрастающий в прошлом член:

$$\mathbf{B} = 0. \tag{24}$$

Тем самым выделяется ветвь

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}e^{H_\Lambda t}, \tag{25}$$

регулярная при обратном продолжении в пределах применимости приближения (22). При ненулевом, но малом $\nabla\Phi$ эта ветвь деформируется; условие (24) сохраняет смысл локального критерия отбора.

4. ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК И ОТКЛОНЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ

Для применения геометрического уравнения отклонения к характеристикам системы (13) введем подъем Эйзенхарта – Баргманна [15–17]. Рассмотрим пятимерное пространство с координатами $(\mathbf{r}, t, s)$, где s — дополнительная координата, и метрическим интервалом

$$d\Sigma^2 = \delta_{ij}\, dr^i dr^j + 2\, dt\, ds - 2\Phi_{\text{eff}}(t, \mathbf{r})\, dt^2. \tag{26}$$

Нулевые геодезические, для которых $dt/d\tau = \text{const}$, имеют координатные проекции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d^2 r^i}{dt^2} = -\partial_i \Phi_{\text{eff}}. \tag{27}$$

Тем самым характеристики системы Власова – Пуассона представлены геодезическими, а их относительное движение определяется кривизной метрики (26).

Для принятого соглашения о знаке тензора кривизны компоненты, входящие в уравнение отклонения, равны

$$R^i{}_{tjt} = \partial^i \partial_j \Phi_{\text{eff}}. \tag{28}$$

Пусть $\boldsymbol{\eta}(t)$ — малый вектор, соединяющий две близкие пространственные траектории. В компонентах

$$\eta^i(t) = r_2^i(t) - r_1^i(t) \tag{29}$$

геодезическое уравнение Якоби с учетом (28) принимает вид

$$\ddot{\eta}^i = -\mathcal{H}^i{}_j \eta^j, \quad \mathcal{H}_{ij} = \partial_i \partial_j \Phi_{\text{eff}} = A_{ij} - \frac{\Lambda c^2}{3}\delta_{ij}. \tag{30}$$

Матрица $\mathcal{H}$ является гессианом эффективного потенциала. Если h_a — ее собственное значение, а η_a — компонента $\boldsymbol{\eta}$ вдоль соответствующего собственного вектора, то

$$\ddot{\eta}_a = -h_a \eta_a. \tag{31}$$

При $h_a < 0$ относительное смещение в данном собственном направлении содержит экспоненциально возрастающую составляющую.

С помощью подъема Эйзенхарта – Баргманна получено уравнение (30), связывающее отклонение соседних характеристик с гессианом эффективного потенциала. Космологическая постоянная сдвигает все собственные значения этого гессиана на величину $-\Lambda c^2/3$ и создает изотропный дефокусирующий вклад. Собственные направления растяжения и сжатия определяются матрицей $A_{ij} = \partial_i \partial_j \Phi$, а их анизотропная часть — приливной матрицей $\mathcal{T}_{ij}$.

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ДОСТУПНОСТЬ И РЕГУЛЯРНАЯ СКЛАДКА

5.1. Локальная энергетическая доступность

Если зависимость Φ_{eff} от времени мала на рассматриваемом участке траектории, величину

$$E = \frac{u^2}{2} + \Phi_{\text{eff}}(t, \mathbf{r}), \quad u^2 = \delta_{ij} u^i u^j, \tag{32}$$

можно использовать как локальный энергетический параметр. Определим

$$Q(t, \mathbf{r}; E) = E - \Phi_{\text{eff}}(t, \mathbf{r}). \tag{33}$$

Из (32) следует, что $Q = u^2/2$. Поэтому область $Q < 0$ недоступна для движения с данным E, поверхность $Q = 0$ является поворотной, а при $Q > 0$ скорость действительна.

5.2. Выбранное подмногообразие фазового пространства

Для анализа складок выберем открытое множество параметров $U \subset \mathbb{R}^3$ и гладкое вложение

$$\begin{gathered} \iota_0 : U \longrightarrow \Gamma, \\ \iota_0(\boldsymbol{\alpha}) = \big(\mathbf{r}_0(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha})\big), \\ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \end{gathered} \tag{34}$$

Под гладким вложением здесь понимается гладкая параметризация без самопересечений, задающая координаты на своем образе. Матрица частных производных $D_{\boldsymbol{\alpha}} \iota_0$ имеет шесть строк и три линейно независимых столбца; это и означает, что ее ранг равен трем. Лагранжев параметр $\boldsymbol{\alpha}$ является постоянным параметром, выбирающим одну начальную фазовую точку и, следовательно, одну характеристику. При фиксированном $\boldsymbol{\alpha}$ соответствующая характеристика имеет вид

$$t \longmapsto \iota_t(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{U}_{t,t_0}\big(\iota_0(\boldsymbol{\alpha})\big) = \big(\mathbf{r}(t, \boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}(t, \boldsymbol{\alpha})\big). \tag{35}$$

Образ вложения ι_0 равен

$$M_0 := \iota_0(U) = \big\{\big(\mathbf{r}_0(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha})\big) : \boldsymbol{\alpha} \in U\big\} \subset \Gamma. \tag{36}$$

Множество M_0 является выбранным трехмерным подмногообразием фазового пространства; далее оно называется начальным фазовым слоем. Его образ в момент t равен

$$M_t := \iota_t(U) = \mathcal{U}_{t,t_0}(M_0). \tag{37}$$

Координатную проекцию фазового пространства определим формулой

$$\pi_{\mathbf{r}} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \mathbf{r}. \tag{38}$$

Координатная проекция слоя M_t задается отображением

$$R_t := \pi_{\mathbf{r}} \circ \iota_t, \quad R_t(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{r}(t, \boldsymbol{\alpha}). \tag{39}$$

Именно отображение R_t, а не само вложение ι_t, может терять локальную обратимость.

Сосредоточение массы на таком слое возникает в идеализированном случае, когда каждой начальной координате соответствует одна скорость. Тогда начальную массу описывает мера

$$d\mu_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \rho_0(\mathbf{r})\, \delta^{(3)}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}))\, d^3r\, d^3u. \tag{40}$$

Здесь ρ_0 — начальная пространственная плотность, $\mathbf{v}_0$ — начальное поле скорости, $\delta^{(3)}$ — дельта-функция Дирака в пространстве скоростей. Мера (40) сосредоточена на трехмерном графике $M_0 = \{(\mathbf{r}, \mathbf{u}) : \mathbf{u} = \mathbf{v}_0(\mathbf{r})\}$. Для классического решения $f : I \times \Gamma \to [0, \infty)$ выбранное подмногообразие M_t задает одно трехпараметрическое семейство характеристик, на котором исследуются локальная геометрия координатной проекции и образование скоростных ветвей.

Определим матрицы

$$F_{ij}(t, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial r^i(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \qquad F = D_{\boldsymbol{\alpha}} R_t, \tag{41}$$

$$W_{ij}(t, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial u^i(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \qquad W = D_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}. \tag{42}$$

Матрица F описывает изменение координатной проекции при изменении параметра $\boldsymbol{\alpha}$, а W — соответствующее изменение скорости. Якобиан координатной проекции равен

$$J(t, \boldsymbol{\alpha}) = \det F(t, \boldsymbol{\alpha}). \tag{43}$$

При $J \neq 0$ отображение R_t локально обратимо: в некоторой окрестности координаты $\boldsymbol{\alpha}$ однозначно выражаются через $\mathbf{r}$. Точки, в которых $J = 0$, называются критическими точками R_t, а их образы в координатном пространстве образуют каустику.

5.3. Условия регулярной складки

Пусть $(t_*, \boldsymbol{\alpha}_*)$ — критическая точка. Ранг F означает размерность образа линейного отображения $\mathbf{k} \mapsto F\mathbf{k}$. Ядром матрицы F называется множество

$$\ker F = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : F\mathbf{k} = 0\}. \tag{44}$$

Простая критическая точка имеет одномерное ядро:

$$\operatorname{rank} F(t_*, \boldsymbol{\alpha}_*) = 2, \quad \dim \ker F(t_*, \boldsymbol{\alpha}_*) = 1. \tag{45}$$

Выберем ненулевой вектор $\mathbf{k}_* \in \ker F(t_*, \boldsymbol{\alpha}_*)$. Направленная производная J по этому вектору определяется равенством

$$D_{\boldsymbol{\alpha}} J[\mathbf{k}_*] = \sum_{j=1}^{3} k_*^j \frac{\partial J}{\partial \alpha_j}. \tag{46}$$

Критическая точка является регулярной складкой типа A_2, если [18, 19]

$$D_{\boldsymbol{\alpha}} J(t_*, \boldsymbol{\alpha}_*)[\mathbf{k}_*] \neq 0. \tag{47}$$

Условие

$$\partial_t J(t_*, \boldsymbol{\alpha}_*) \neq 0 \tag{48}$$

означает, что при прохождении момента t_* якобиан изменяется с ненулевой скоростью и его равенство нулю не сохраняется на конечном интервале времени.

В подходящих локальных координатах $(s, \mathbf{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, где $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, регулярная складка имеет нормальную форму:

$$R_t(s, \mathbf{z}) = (s^2, z_1, z_2). \tag{49}$$

Обозначим первую координату образа через $\zeta = s^2$. При $\zeta > 0$ одной координатной точке соответствуют две обратные ветви $s_\pm = \pm\sqrt{\zeta}$.

Пусть на фазовом слое задана массовая мера

$$d\nu = m(s, \mathbf{z})\, ds\, d^2z, \tag{50}$$

где ν — мера, приписывающая массу частям слоя, а $m \geq 0$ — ее плотность относительно параметрического объема $ds\, d^2z$. После проекции (49) плотность этой меры относительно $d\zeta\, d^2z$ равна

$$\begin{aligned} \rho_\nu(\zeta, \mathbf{z}) &= \frac{m(\sqrt{\zeta}, \mathbf{z}) + m(-\sqrt{\zeta}, \mathbf{z})}{2\sqrt{\zeta}}, \\ \rho_\nu(\zeta, \mathbf{z}) &\sim \frac{m(0, \mathbf{z})}{\sqrt{\zeta}}, \quad \zeta \downarrow 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Знак $\sim$ означает равенство главных асимптотических членов. Профиль $\zeta^{-1/2}$ локально интегрируем, поскольку $\int_0^\varepsilon \zeta^{-1/2}\, d\zeta < \infty$. Таким образом, регулярная складка создает универсальную локальную концентрацию массы для меры, переносимой выбранным фазовым слоем.

Поскольку каждое отображение $\mathcal{U}_{t,t_0}$ является диффеоморфизмом, вложение $\iota_t = \mathcal{U}_{t,t_0} \circ \iota_0$ сохраняет ранг три. Его дифференциал имеет блочный вид:

$$D_{\boldsymbol{\alpha}} \iota_t = \begin{pmatrix} F \\ W \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Поэтому

$$F\mathbf{k}_* = 0 \quad \Longrightarrow \quad W\mathbf{k}_* \neq 0. \tag{53}$$

Иными словами, направление, потерянное при координатной проекции, остается различимым по скорости. В окрестности регулярной складки существует постоянная $c_0 > 0$, для которой [18]

$$|\mathbf{u}(s,\mathbf{z}) - \mathbf{u}(-s,\mathbf{z})| \geq c_0|s|. \tag{54}$$

После складки обратное отображение от координаты к параметру имеет несколько локальных ветвей $\boldsymbol{\alpha}_b(t,\mathbf{r})$. Каждой ветви соответствует скорость

$$\mathbf{u}_b(t,\mathbf{r}) = \mathbf{u}\big(t, \boldsymbol{\alpha}_b(t,\mathbf{r})\big). \tag{55}$$

Формулы (51), (54) и (55) дают локальное кинематическое описание многопоточной области: положение каустики определяется условием $J = 0$, концентрация массы — профилем ρ_ν, а отдельные потоки разрешаются по значениям $\mathbf{u}_b(t,\mathbf{r})$.

В работе [18] доказана локальная теорема об образовании такой складки для классического решения системы Власова–Пуассона и создаваемого им самосогласованного потенциала $\Phi[f]$. Пусть $z_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$ — фазовая точка, в окрестности которой $f(0, z_0) > 0$. В локальных координатах выбирается начальное вложение

$$\begin{aligned} \iota_{0,\kappa}(\boldsymbol{\alpha}) &= \big(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_\kappa(\boldsymbol{\alpha})\big), \\ \mathbf{v}_\kappa(\boldsymbol{\alpha}) &= \left(-\kappa\alpha_1 + \frac{\beta\kappa^2}{2}\alpha_1^2\right)\mathbf{e}_1, \end{aligned} \tag{56}$$

где $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\kappa > 0$ задает величину начального сжатия, $\beta \neq 0$ задает его неоднородность, а $|\boldsymbol{\alpha}| < c_1/\kappa$ при некоторой постоянной $c_1 > 0$. Соответствующие характеристики удовлетворяют уравнениям (13) с потенциалом, создаваемым полным решением f. Для достаточно большого κ координатная проекция вдоль характеристики $\boldsymbol{\alpha} = 0$ образует трансверсальную регулярную складку в момент

$$t_\kappa = \kappa^{-1} + O(\kappa^{-3}). \tag{57}$$

Запись $O(\kappa^{-3})$ означает величину, модуль которой не превосходит $C\kappa^{-3}$ при некоторой постоянной C и достаточно большом κ. Следовательно, параметр κ непосредственно управляет временем образования складки вдоль характеристики $\boldsymbol{\alpha} = 0$: ведущий член равен κ^{-1}.

6. ПЕРЕНОС МАССЫ МЕЖДУ РАЗРЕЖЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Рассмотрим две разреженные области $\mathcal{C}_1(t), \mathcal{C}_2(t) \subset \mathbb{R}^3$. Для выбранного семейства характеристик определим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12} = \big\{ \boldsymbol{\alpha} \in U :\ \exists\, t_1, t_2 :\ & \\ \mathbf{r}(t_1,\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{C}_1(t_1), \quad & \mathbf{r}(t_2,\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{C}_2(t_2) \big\}. \end{aligned} \tag{58}$$

Если множество $\mathcal{A}_{12}$ имеет ненулевой трехмерный объем в пространстве параметров U, то через обе области проходит не отдельная характеристика, а трехпараметрическое семейство характеристик.

Плотность потока массы в координатном пространстве равна

$$\mathbf{j}(t,\mathbf{r}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}\, f(t,\mathbf{r},\mathbf{u})\, d^3u. \tag{59}$$

Пусть S_{12} — ориентированная поверхность между областями, а $\mathbf{n}$ — ее единичная нормаль. Поток массы через эту поверхность определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12}(t) &= \int\limits_{S_{12}} \mathbf{j}(t,\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}\, dS, \\ \mathcal{F}_{12}(t) &= \int\limits_{S_{12}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) f(t,\mathbf{r},\mathbf{u})\, d^3u\, dS. \end{aligned} \tag{60}$$

Знак $\mathcal{F}_{12}$ задает преимущественное направление переноса, а $\mathcal{F}_{12} \neq 0$ означает ненулевой обмен массой между областями.

На выбранном фазовом слое одной координатной точке может соответствовать одна или несколько локальных скоростных ветвей. При $J \neq 0$ отображение R_t локально обратимо. После образования складки одной координатной точке соответствуют несколько ветвей (55) с различными скоростями. Совместное использование ρ, $\mathbf{j}$, $\mathcal{F}_{12}$, условия $J = 0$ и ветвей $\mathbf{u}_b$ позволяет определять положения локальных сгущений, число потоков, их скорости и направление переноса вещества.

Введенные величины образуют аналитический набор характеристик локальной структуры: координатная проекция фазового слоя определяет каустические поверхности, профиль (51) описывает концентрацию массы около регулярной складки, формула (55) разделяет потоки по скорости, а интеграл (60) задает скорость переноса массы между разреженными областями.

7. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Положим

$$\lambda = \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{61}$$

Чтобы отделить изотропный вклад $\lambda\mathbf{r}$, введем вспомогательное масштабирование [18]

$$\mathbf{r}(t,\boldsymbol{\alpha}) = \chi(t)\mathbf{y}(t,\boldsymbol{\alpha}), \quad \ddot{\chi} = \lambda\chi, \quad \chi(t) > 0. \tag{62}$$

Здесь $\chi(t)$ — вспомогательный масштаб, $\mathbf{y}$ — преобразованная координата. Функция χ не отождествляется с фридмановским масштабным фактором $a(t)$.

Для одного и того же выбранного слоя определим

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{r}} &= D_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{r}, \qquad F_{\mathbf{y}} = D_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{y}, \\ J_{\mathbf{r}} &= \det F_{\mathbf{r}}, \quad J_{\mathbf{y}} = \det F_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \tag{63}$$

Из (62) следует, что

$$F_{\mathbf{r}} = \chi F_{\mathbf{y}}, \quad J_{\mathbf{r}} = \chi^3 J_{\mathbf{y}}. \tag{64}$$

Поскольку $\chi > 0$, ранг, ядро и тип регулярной складки при таком масштабировании не изменяются.

До момента складки матрицы $F_{\mathbf{r}}$ и $F_{\mathbf{y}}$ обратимы. Определим

$$L_{\mathbf{r}} = \dot{F}_{\mathbf{r}}F_{\mathbf{r}}^{-1}, \quad L_{\mathbf{y}} = \dot{F}_{\mathbf{y}}F_{\mathbf{y}}^{-1}. \tag{65}$$

Матрица $L_{\mathbf{r}} = D_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{u}\,(D_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{r})^{-1}$ представляет градиент скорости вдоль слоя, выраженный через текущие координаты. Если локально $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t,\mathbf{r})$, то ее компоненты равны $(L_{\mathbf{r}})^i{}_j = \partial u^i/\partial r^j$. Дифференцирование первого равенства (64) дает

$$L_{\mathbf{r}} = \frac{\dot{\chi}}{\chi}\mathbb{I}_3 + L_{\mathbf{y}}, \tag{66}$$

где $\mathbb{I}_3$ — единичная матрица третьего порядка.

Для любой матрицы L определим две части:

$$S(L) = \frac{1}{2}(L + L^{\mathsf{T}}) - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(L)\mathbb{I}_3, \quad \Omega(L) = \frac{1}{2}(L - L^{\mathsf{T}}). \tag{67}$$

Верхний индекс «T» означает транспонирование, а $\operatorname{tr}(L)$ — сумму диагональных элементов. Симметричная бесследовая матрица $S(L)$ описывает изменение формы без равномерного изменения объема, а антисимметричная матрица $\Omega(L)$ — локальное вращение. Из (66) следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} L_{\mathbf{r}} &= 3\frac{\dot{\chi}}{\chi} + \operatorname{tr} L_{\mathbf{y}}, \\ S(L_{\mathbf{r}}) &= S(L_{\mathbf{y}}), \\ \Omega(L_{\mathbf{r}}) &= \Omega(L_{\mathbf{y}}). \end{aligned} \tag{68}$$

Равенства (68) дают полученную в работе декомпозицию локального градиента скорости. Вклад $\lambda\mathbf{r}$ добавляет к $L_{\mathbf{y}}$ скалярную матрицу $(\dot{\chi}/\chi)\mathbb{I}_3$ и изменяет след L, характеризующий локальную скорость изменения объема. Матрицы $S(L)$ и $\Omega(L)$ при выделении этого вклада сохраняются. Тем самым изотропное расширение, обусловленное космологическим членом, отделено от анизотропной деформации и локального вращения. Полученная декомпозиция позволяет раздельно исследовать космологическую дефокусировку характеристик и влияние приливной части самосогласованного гравитационного поля на геометрию складок.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построено локальное кинетико-геометрическое описание бесстолкновительного вещества, основанное на системе Власова – Пуассона с космологической постоянной. В физических координатах из слабополевого нерелятивистского предела уравнений Эйнштейна получено модифицированное уравнение Пуассона:

$$\Delta\Phi_{\text{eff}} = 4\pi G\rho - \Lambda c^2.$$

Представление $\Phi_{\text{eff}} = \Phi - \Lambda c^2 r^2/6$ приводит к уравнениям характеристик

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}} = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi + \frac{\Lambda c^2}{3}\mathbf{r}$$

и к соответствующему уравнению Власова. Тем самым космологический член в кинетическом уравнении выведен из ньютоновского предела общей теории относительности.

Для характеристик, проходящих через разреженную область, исследовано обратное продолжение движения. На участке преобладания космологического члена уравнение движения принимает вид $\ddot{\mathbf{r}} = H_\Lambda^2\mathbf{r}$. Условие ограниченности при асимптотическом обратном продолжении выделяет ветвь $\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}e^{H_\Lambda t}$. При медленном изменении эффективного потенциала введен локальный энергетический параметр $Q = E - \Phi_{\text{eff}}$, определяющий доступную область $Q > 0$ и поворотную поверхность $Q = 0$.

С помощью подъема Эйзенхарта – Баргманна характеристики представлены как координатные проекции геодезических пятимерного пространства. Из компонент его кривизны получено уравнение отклонения:

$$\ddot{\eta}^i = -\mathcal{H}^i{}_j\eta^j, \quad \mathcal{H}_{ij} = \partial_i\partial_j\Phi - \frac{\Lambda c^2}{3}\delta_{ij}.$$

Положительная космологическая постоянная создает изотропный дефокусирующий сдвиг спектра $\mathcal{H}$, тогда как собственные направления относительного растяжения и сжатия определяются гессианом гравитационного потенциала вещества и его приливной частью.

Для исследования многопоточности выбрано трехмерное подмногообразие M_0 одночастичного фазового пространства и рассмотрен его перенос характеристическим потоком, $M_t = \mathcal{U}_{t,t_0}(M_0)$. Образование складки связано с потерей локальной обратимости координатной проекции $R_t : \boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{r}(t, \boldsymbol{\alpha})$. Для регулярной складки сформулированы условия ранга, невырожденности и трансверсальности по времени. В локальной нормальной форме $R_t(s, \mathbf{z}) = (s^2, \mathbf{z})$ проекция массовой меры имеет интегрируемый профиль:

$$\rho_\nu(\zeta, \mathbf{z}) \sim \frac{m(0, \mathbf{z})}{\sqrt{\zeta}}, \quad \zeta \downarrow 0.$$

Две ветви, совпадающие после координатной проекции, разрешаются по скорости и удовлетворяют оценке

$$|\mathbf{u}(s, \mathbf{z}) - \mathbf{u}(-s, \mathbf{z})| \geq c_0 |s|.$$

Получена также асимптотика времени образования подготовленной складки:

$$t_\kappa = \kappa^{-1} + O(\kappa^{-3}).$$

Перенос вещества между двумя разреженными областями описан двумя взаимодополняющими объектами: множеством характеристик, проходящих через обе области, и потоком массы через разделяющую поверхность,

$$\mathcal{F}_{12}(t) = \int\limits_{S_{12}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})\, d^3u\, dS.$$

Вместе с каустическим условием $J = 0$, профилем ρ_ν и скоростными ветвями $\mathbf{u}_b$ эта формула образует систему локальных характеристик, определяющих концентрацию массы и ее перенос в ячеистой структуре.

Наконец, посредством преобразования

$$\mathbf{r} = \chi(t)\mathbf{y}, \quad \ddot{\chi} = (\Lambda c^2/3)\chi$$

получена декомпозиция градиента скорости:

$$L_{\mathbf{r}} = \frac{\dot{\chi}}{\chi}\mathbb{I}_3 + L_{\mathbf{y}}.$$

Космологический вклад изменяет след L, т. е. изотропную скорость изменения объема, и сохраняет симметричную бесследовую и антисимметричную части. Эта декомпозиция отделяет космологическую дефокусировку от анизотропной деформации и локального вращения фазового слоя.

Прикладные астрофизические аспекты. Методы, изложенные в настоящей работе, применимы, в частности, для динамической интерпретации наблюдаемой космологической структуры. Наблюдательная проверка полученных результатов может быть сформулирована как обратная задача восстановления фазовой динамики вещества. Карты линзирующего потенциала совместно с томографическими данными о распределении галактик позволяют восстановить гравитационный потенциал и его гессиан. Подстановка восстановленного гессиана в уравнение отклонения характеристик определяет локальные направления фокусировки и дефокусировки вещества. Их собственные направления могут быть сопоставлены с ориентацией наблюдаемых стенок и нитей космической паутины. Дополнительную проверку дают положения поверхностей $J = 0$, поперечный профиль концентрации массы около регулярной складки, разделение локальных скоростных ветвей и поток массы через границы разреженных областей. Таким образом, предложенный подход позволяет по совместным данным линзирования, пространственного распределения вещества и поля скоростей восстанавливать локальный оператор динамической устойчивости, геометрию фазового слоя и допустимые начальные состояния системы Власова – Пуассона.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания № FFMN-2025-0027 «Теоретические исследования классических и квантовых кинетических уравнений и их использование в математическом моделировании прикладных задач».

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. C. McVittie, *General Relativity and Cosmology*, Chapman and Hall, London (1965), Ch. VI.

2. M. Nowakowski, *The Consistent Newtonian Limit of Einstein's Gravity with a Cosmological Constant*, Int. J. Mod. Phys. D **10**, 649 (2001), https://doi.org/10.1142/S0218271801001189.

3. M. Carrera and D. Giulini, *Influence of Global Cosmological Expansion on Local Dynamics and*

Kinematics, Rev. Mod. Phys. **82**, 169 (2010), https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.169.

4. S. R. Green and R. M. Wald, *Newtonian and Relativistic Cosmologies*, Phys. Rev. D **85**, 063512 (2012), https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.063512.

5. G. Rein and A. D. Rendall, *Global Existence of Classical Solutions to the Vlasov–Poisson System in a Three-Dimensional, Cosmological Setting*, Arch. Ration. Mech. Anal. **126**, 183 (1994), https://doi.org/10.1007/BF00391558.

6. H. Lee, *Classical Solutions to the Vlasov – Poisson System in an Accelerating Cosmological Setting*, J. Differ. Equ. **249**, 1111 (2010), https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.04.010.

7. T. Abel, O. Hahn, and R. Kaehler, *Tracing the Dark Matter Sheet in Phase Space*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **427**, 61 (2012), https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21754.x.

8. Ya. B. Zel'dovich, *Gravitational Instability: An Approximate Theory for Large Density Perturbations*, Astron. Astrophys. **5**, 84 (1970) [Я. Б. Зельдович, *Распад однородного вещества на части под действием тяготения*, Астрофизика **6**, 319 (1970)].

9. P. J. E. Peebles, *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton Univ. Press, Princeton (1980).

10. S. F. Shandarin and Ya. B. Zel'dovich, *The Large-Scale Structure of the Universe: Turbulence, Intermittency, Structures in a Self-Gravitating Medium*, Rev. Mod. Phys. **61**, 185 (1989), https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.185.

11. J. R. Bond, L. Kofman, and D. Pogosyan, *How Filaments of Galaxies Are Woven into the Cosmic Web*, Nature **380**, 603 (1996), https://doi.org/10.1038/380603a0.

12. N. I. Libeskind, R. van de Weygaert, M. Cautun et al., *Tracing the Cosmic Web*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **473**, 1195 (2018), https://doi.org/10.1093/mnras/stx1976.

13. N. Hamaus, A. Pisani, P. M. Sutter et al., *Constraints on Cosmology and Gravity from the Dynamics of Voids*, Phys. Rev. Lett. **117**, 091302 (2016), https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.091302.

14. S. Nadathur, *Testing Cosmology with a Catalogue of Voids in the BOSS Galaxy Surveys*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **461**, 358 (2016), https://doi.org/10.1093/mnras/stw1340.

15. L. P. Eisenhart, *Dynamical Trajectories and Geodesics*, Ann. Math. **30**, 591 (1928), https://doi.org/10.2307/1968307.

16. C. Duval, G. Burdet, H. P. Künzle et al., *Bargmann Structures and Newton–Cartan Theory*, Phys. Rev. D **31**, 1841 (1985), https://doi.org/10.1103/PhysRevD.31.1841.

17. M. Cariglia, C. Duval, G. W. Gibbons et al., *Eisenhart Lifts and Symmetries of Time-Dependent Systems*, Ann. Phys. **373**, 631 (2016), https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.07.033.

18. N. N. Fimin, *Fold Formation and Branch Information in Vlasov–Poisson Flows with a Repulsive Harmonic Field*, Zenodo preprint, version 1.0 (2026), https://doi.org/10.5281/zenodo.21461815.

19. V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Vol. I: *The Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts*, Birkhäuser, Boston (1985) [В. И. Арнольд, С. М. Гусейн-Заде, А. Н. Варченко, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1, *Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, Москва (1982)].

20. M. Merafina, G. S. Bisnovatyi-Kogan, and M. Donnari, *Galaxy Clusters in Presence of Dark Energy: A Kinetic Approach*, Astron. Astrophys. **568**, A93 (2014), https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424062.

Cosmological Consequences of the Vlasov – Poisson System: Phase-Space Flow in the Cosmic Web

N. N. Fimin*

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences
125047, Moscow, Russia

*E-mail: oberon@kiam.ru

Received April 04, 2026
Revised August 10, 2026
Accepted August 23, 2026

Abstract

A new kinetic-geometric approach to the local dynamics of collisionless matter is proposed based on the Vlasov – Poisson system with a cosmological constant. The term $(\Lambda c^2/3)\mathbf{r}$ in the characteristic equations is derived from the Newtonian limit of the Einstein equations. The Eisenhart – Bargmann lift is used to obtain the deviation equation for neighboring trajectories and to identify the isotropic defocusing contribution of the cosmological constant. For a three-dimensional phase-space layer, the conditions for a regular fold of the coordinate projection are formulated, the mass-concentration profile $\rho_\nu \sim \zeta^{-1/2}$ is obtained, and an estimate for the separation of velocity branches is derived. A decomposition of the velocity gradient is obtained that separates isotropic expansion from anisotropic deformation and local rotation.

Keywords: Vlasov – Poisson system, cosmological constant, cosmic web, Eisenhart – Bargmann lift, phase-space flow, regular fold, inverse problem

Funding. The work was carried out within the State Assignment No. FFMN-2025-0027, "Theoretical Studies of Classical and Quantum Kinetic Equations and Their Use in Mathematical Modeling of Applied Problems".

Conflict of interest. The author declares that he has no conflict of interest.